Über Zustandsverhältnisse strömender Flüssigkeiten

und

deren Wirkungsweise in Turbinenrädern

Von der K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation,

vorgelegt von

E. DOLDER.

Referent: **Prof. Dr. phil. Dr. ing. Rudolf Camerer.**
Korreferent: **Prof. Dr. August Föppl.**

(1907.)

Buch- u. Kunstdruckerei JEAN FREY, Dianastrasse 5/7.

Ueber

Zustandsverhältnisse strömender Flüssigkeiten

und deren

Wirkungsweise in Turbinenrädern.

Von der K. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation,

vorgelegt von

E. DOLDER.

ACAD. LIBRARY BIBL.

Referent: **Prof. Dr. phil. Dr. ing. Rudolf Camerer.**
Korreferent: **Prof. Dr. August Föppl.**

ZÜRICH
Buch- und Kunstdruckerei JEAN FREY, Dianastrasse 5/7.

Bezeichnungen.

c	absolute Geschwindigkeit.
c_u	Umfangskomponente der absoluten Geschwindigkeit.
c_z, c_r	Axial- bezw. Radialkomponente der absoluten Geschwindigkeit.
w	Relativgeschwindigkeit.
u	Umfangsgeschwindigkeit.
ω	Winkelgeschwindigkeit.
Index 1	bezieht sich auf Grössen am Eintritt des Laufrades.
„ 2	„ „ „ „ „ Austritt „ „
β	Winkel zwischen Umfangsgeschwindigkeit und Tangente am Schaufelprofil.
δ	Krümmungswinkel der Schaufel.
k	Winkel zwischen Turbinenaxe und der Erzeugenden der die Stromlinien tangierenden Kegelflächen.
ϑ	Drehwinkel im zylindrischen Koordinatensystem.
ψ	Ablenkungswinkel der absoluten Geschwindigkeit.
φ	„ „ Radial- bezw. Tangentialkomponente der absoluten Geschwindigkeit.
p	spez. hydraulische Pressung, welche der potentiellen Energie der Flüssigkeit entspricht, bezw. totaler innerer spez. Flüssigkeitsdruck.
q	Flüssigkeitswärme pro *kg*.
λ	Wärmeinhalt „ „
$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} =$	spez. Wärme bei konstantem Druck. / spez. Wärme bei konstantem Volumen.
f	Durchflussquerschnitt.
dm	Massenelement.
M	sekundliche Flüssigkeitsmasse.
γ	spez. Gewicht.
$v = \frac{1}{\gamma}$	spez. Volumen.
G_R	im Rade befindliches Flüssigkeitsgewicht.
C_R	Zentrifugalkraft der im Rade befindlichen Flüssigkeit.

N	Normaldruck auf Leitfläche pro Masseneinheit.
P_u	Umfangskraft pro Masseneinheit.
M_T	Drehmoment.
P_z	Axialdruck pro Masseneinheit.
P_r	Radialdruck „ „
$P_{u_\varepsilon}, P_{z_\varepsilon}, P_{r_\varepsilon}$	Umfangs-Axial-Radialkraft pro sek. Flüssigkeitsmasse.
A	geleistete Arbeit pro Masseneinheit.
L_ε	hydraulische Leistung.
$(dP)_2, (dP)_3$	Kraft von unendlich kleiner zweiter bezw. dritter Ordnung.

Berichtigungen.

Es ist zu lesen:

Seite 9—10, Masseneinheit bezw. Massenteilchen, statt Masseinheit bezw. Massteilchen.
» 15, Zeile 2: in Fig. 4 dargestellt, statt in Fig. 4.

Ueber

Zustandsverhältnisse strömender Flüssigkeiten und deren Wirkungsweise in Turbinenrädern.

Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung besteht im grossen und ganzen darin, unter Zugrundelegung einfacher Strömungsverhältnisse bezw. Zustandsänderungen einer Flüssigkeit die allseitig auf ihre Leitflächen ausgeübten Drucke auf analytische Weise ihrer Grösse, Richtung und Lage nach zu bestimmen.

Dem eindeutigen Zwecke dieses Problems entsprechend setzen wir für unsere nähern Untersuchungen ganz allgemein eine stationäre Flüssigkeitsströmung voraus, für welche wir den Verlauf der verschiedenen Stromlinien als gegeben betrachten. Die sämtlichen, den Zustand einer Flüssigkeit charakterisierenden Grössen beziehen sich jeweils nur auf einen einzelnen, unendlich dünnen Flüssigkeitsfaden oder bedeuten andernfalls bloss bestimmte Mittelwerte gewisser endlicher Durchflussquerschnitte.

Unter der weitern Annahme, dass zwischen Flüssigkeit und Umgebung kein Wärmeaustausch stattfinde, reduzieren sich dann zur Untersuchung der Strömungsverhältnisse einer Flüssigkeit die in der Theoret. Masch.-Lehre I § 12 von Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. F. Grashof angeführten sieben theoretischen Grundgleichungen der Hydrodynamik auf die Gleichung des Arbeitsvermögens bezw. diejenige der lebendigen Kraft und die Kontinuitätsgleichung. Mit Rücksicht auf unsere nächsten Betrachtungen mögen diese drei Gleichungen für die Relativbewegung der Flüssigkeit im Rade im folgenden in Kürze abgeleitet werden.

Für den allgemeinen Fall einer Radialturbine nach Fig. 1 und Fig. 2 ist die von der Zentrifugalkraft innerhalb des Rades auf die

Gewichtseinheit der Flüssigkeit in ihrer relativen Bewegungsrichtung ausgeübte Arbeit gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{g}\int_2^1 (r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta) \cdot w \cdot dt$$

oder, da $w \cdot dt \cdot \sin\beta = dr$ durch:

$$\frac{1}{g}\int_2^1 r \cdot \omega^2 \cdot dr = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2 \cdot g}$$

Wird nun die von der Schwerkraft innerhalb des Rades pro Gewichtseinheit 1 *kg* verrichtete Arbeit summarisch mit A_g bezeichnet, so lässt sich, für ganz beliebige Verhältnisse der innern strömenden Bewegung, nach den bekannten Ausdrücken der mechan. Wärmetheorie, anschreiben:

1. Die Gleichung des Arbeitsvermögens bezogen auf die Relativbewegung:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_1 v_1 - p_2 v_2) \pm A_g & \text{für Gase.} \\ \dfrac{1}{A}(\lambda_1 - \lambda_2) \pm A_g & \text{für Dämpfe.} \\ \dfrac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) + \dfrac{1}{A}(q_1 - q_2) \pm A_g & \text{für Wasser.} \end{cases}$$

Sehen wir nun vorderhand von innern passiven Widerständen und ferner auch von der Schwer- und Zentrifugalkraftswirkung ab, so ist die Aenderung der Strömungsenergie $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$ lediglich eine Folge eines bestimmten Druckgefälles und entspricht für expansible Flüssigkeiten einerseits der Arbeit der verschiedenen auf die Massenelemente einwirkenden Oberflächenkräfte und anderseits ihrer gleichzeitig sich vollziehenden Expansionsarbeit selbst. Diese beiden Arbeitsgrössen sind also, ganz analog wie z. B. die allerdings zeitlich von einander getrennten Admissions- und Expansionsarbeiten einer Kolbendampfmaschine (schädlicher Raum = 0 angenommen) analytisch bestimmt durch den Ausdruck $\int v \cdot dp$. Ziehen wir nun

auch die Wirkung der innern Reibungswiderstände und diejenige von Schwer- und Zentrifugalkraft in Betracht, so lautet:

2. Die Gleichung der lebendigen Kraft, bezogen auf die Relativbewegung:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \int_2^1 v \cdot dp - R \pm A_g$$

wobei der Integralausdruck $\int v \cdot dp$ sich auf die tatsächliche Expansionskurve bezieht.

3. Die Kontinuitätsgleichung bezogen auf die Relativbewegung ist für einen einzelnen Flüssigkeitsfaden ohne weiteres in folgender Form verständlich ausgedrückt:

$$df \cdot w = dG \cdot v = \frac{1}{\gamma} \cdot dG$$

Es liegt nun wohl am nächsten, die Grösse der an ein Turbinenrad abgegebenen hydraulischen oder indizierten Leistung auf Grund des Prinzipes der Erhaltung der Energie aufzustellen.

Ganz ohne Rücksicht auf allenfalls auftretende Stosswirkungen am Eintritte oder auch sonstige innerhalb des Rades sich geltend machende passive Widerstände kontinuierlicher oder diskontinuierlicher Art, ist die hydraulische Leistung einschliesslich Reibungsarbeit jederzeit bestimmt durch die Differenz der sämtlichen absoluten Energiegrössen, welche die Flüssigkeit unmittelbar vor dem Ein- bezw. nach dem Austritte aus dem durch die Schaufelkanten begrenzten Laufradbereiche besitzt, vermehrt um die von der Schwerkraft innerhalb des Rades verrichtete Arbeit.*) Bezeichnet man die erstern Arbeitsgrössen mit Index 1, die letztern mit 2 und setzt voraus, dass sämtliche Massenteilchen ein und derselben Zustandsänderung unterliegen, so lässt sich die pro $(M \cdot g)^{kg}$ in der Sekunde an das Laufrad übertragene Arbeit wie folgt ausdrücken:

$$L_\varepsilon = \frac{M}{2}(c_1^2 - c_2^2) + \begin{cases} M \cdot g \left\{ \left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \right) (p_1 v_1 - p_2 v_2) \pm A_g \right\} & \text{für Gase.} \\ M \cdot g \left\{ \frac{1}{A} (\lambda_1 - \lambda_2) \pm A_g \right\} & \text{für Dämpfe.} \\ M \cdot g \left\{ \frac{1}{\gamma} (p_1 - p_2) + \frac{1}{A} (q_1 - q_2) \pm A_g \right\} & \text{für Wasser} \end{cases}$$

* Vergleiche: Dinglers polyt. Journal 1906. S. 817.

Die Wirkung der Reibungsarbeit ist in den vorstehenden Gleichungen in einer Abnahme der hydraulisch verwertbaren und entsprechenden Zunahme der durch die Turbine nicht ausbeutbaren Energiegrössen zu suchen.

Nach einer ähnlichen Betrachtung lässt sich unter Einführung des relativen Arbeitsvermögens die Hauptgleichung der Turbinentheorie in der üblichen Form schreiben:

$$L_\varepsilon = \frac{M}{2}(c_1^2 - c_2^2) + M \cdot g \left\{ \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \right\}$$

$$= \frac{M}{2}(c_1^2 + u_1^2 - w_1^2 - c_2^2 - u_2^2 + w_2^2)$$

Unter der Annahme, dass der positive Richtungssinn mit demjenigen der Radbewegung zusammenfällt, ist aus Fig. 1 oder 2 zu ersehen, dass auch für die Geschwindigkeitsgrössen vor dem Eintritt in das Laufrad die Beziehung besteht:

$$c_1^2 - w_1^2 = c_{u1}^2 - w_{u1}^2 = (c_{u_1} + w_{u_1})(c_{u_1} - w_{u_1}) = u_1 (c_{u_1} + w_{u_1})$$

und analog am Austritte des Laufrades:

$$-(c_2^2 - w_2^2) = -(c_{u2}^2 - w_{u2}^2) = -(c_{u_2} + w_{u_2})(c_{u_2} - w_{u_2}) = -u_2 (c_{u_2} + w_{u_2})$$

Also ergibt sich:

$$L_\varepsilon = \frac{M}{2}\left\{ u_1 (c_{u_1} + w_{u_1} + u_1) - u_2 (c_{u_2} + w_{u_2} + u_2) \right\} \quad \text{oder da}$$

$u_1 + w_{u_1} = c_{u_1}$ und $u_2 + w_{u_2} = c_{u_2}$, so folgt

$$L_\varepsilon = M(c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2)$$

Da uns zu diesem Ausdrucke einzig und allein die Anwendung des Prinzipes der Erhaltung der Energie führt, so bedeutet er auch ganz allgemein die totale, effektive an das Laufrad abgegebene hydraulische Leistung. Dabei sind unter c_{u_1} und c_{u_2} immer die wirklichen absoluten Geschwindigkeitskomponenten zu verstehen, deren Bestimmung aber die Kenntnis der tatsächlichen Zustandskurve der strömenden Flüssigkeit voraussetzt. Dem begrenzten Ziele unserer Arbeit gemäss sehen wir jedoch von einer Beurteilung des Einflusses irgend welcher passiver Widerstände vollständig ab, d. h. wir setzen für alle unsere folgenden rechnerischen Ableitungen

eine reibungslose Flüsssigkeit voraus, welche stossfrei in ein Rad mit unendlich dünnen Schaufelflächen eintritt und in ihrem Laufe durch dasselbe einer kontinuierlichen Geschwindigkeitsänderung unterliegt.

Eine Einsicht in die Wirkungsart der Flüssigkeit auf ihre Leitflächen wird nun durch vorstehende Ableitung noch gar nicht erreicht. Schon näher bringt uns diesem Ziele die Untersuchung der in der Radbewegung erzeugten Reaktionskraft der Flüssigkeitsmasse, wie dies aus folgendem hervorgehen wird.

Die Kräfte, welche ein Massenteilchen dm infolge einer bestimmten Tangential- und Normalbeschleunigung äussert, sind bestimmt durch die beiden Ausdrücke:

1. $dm \cdot \frac{dc}{dt}$ in der momentanen Bewegungsrichtung.

2. $dm \cdot c \cdot \frac{d\psi}{dt}$ normal zu der momentanen Bewegungsrichtung,

   wenn $\frac{d\psi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit welcher die Richtungsänderung des Massenelementes absolut im Raume sich vollzieht.

Besitzt also nach Fig. 1 ein Flüssigkeitsteilchen in irgend einem Punkte im Raum die momentane absolute Geschwindigkeit c, so wird der daselbst an das Rad übertragene Arbeitsdruck erzeugt durch:

1. die Grössenänderung der Tangentialkomponente von c, welcher eine Kraft von dem Werte $dm \cdot \frac{dc_u}{dt}$ entspricht und

2. die mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit vor sich gehende Richtungsänderung der Radialkomponente von c, aus welcher eine Reaktion von der Grösse $dm \cdot c_r \frac{d\varphi}{dt} = dm \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ hervorgeht.

Die auf die Masseinheit des Flüssigkeitsteilchens bezogenen Arbeitskräfte bezw. die Beschleunigungen schreiben sich also:

$$P_{u_1} = \frac{dc_u}{dt} \quad \text{und} \quad P_{u_2} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Zur Bestimmung des Wertes $\frac{d\varphi}{dt}$ führt die Ueberlegung, dass während der unendlich kleinen Zeit dt das Massteilchen im Raum in der Richtung der Radbewegung ein Wegelement von der Grösse $c_u \cdot dt$ zurücklegt, so dass die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Radialgeschwindigkeit c_r eine Richtungsänderung erfährt, wird:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\frac{c_u \cdot dt}{r}\right)}{dt} = \frac{c_u}{r},$$ also ist auch:

$$P_{u_2} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{c_u}{r}$$ und es wird die Summe beider Ausdrücke:

$$P_u = P_{u_1} + P_{u_2} = \frac{1}{dt}\left(dc_u + \frac{c_u}{r} \cdot dr\right) = \frac{1}{dt} \cdot \frac{1}{r}(r \cdot dc_u + c_u \cdot dr)$$ also

$$P_u = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(c_u \cdot r)}{dt}$$

Durch Multiplikation mit dem in der Zeit dt vom Rade zurückgelegten Wegelement $r \cdot \omega \cdot dt$ ergibt sich für den Beharrungszustand die pro Masseneinheit des Flüssigkeitsteilchens an das Rad abgegebene Elementararbeit, zu:

$$dA = d(c_u \cdot r \cdot \omega) = d(c_u \cdot u)$$

und durch Integration die auf der ganzen Höhe des Rades an dasselbe abgegebene Arbeit, immer pro Masseinheit des betreffenden Flüssigkeitsteilchens verstanden zu:

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

Setzt man wiederum gleiche Zustandsänderung sämtlicher das Laufrad durchfliessender Flüssigkeitsteilchen voraus, so gelangen wir ohne weiteres zu der frühern bekannten Formel für die an das Rad abgegebene hydraulische Leistung:

$$L_e = M(c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2)$$

Dieser Ausdruck hat ganz allgemeine Giltigkeit für Aktions- und Reaktionsturbinen, d. h. besser ausgedrückt, sowohl für Räder mit einseitigem als auch beidseitigem Schaufeldrucke. Denn für die Grösse der Arbeitskraft ist endgiltig immer nur die durch die

Schaufeln bewirkte Bewegungsänderung der Flüssigkeit massgebend, im Gegensatz zu dem in axialem bezw. radialem Sinne geäusserten totalen Raddrucke einer Uebrdruckturbine. Dieser unterscheidet sich nämlich gegenüber demjenigen einer Druckturbine stets noch um einen ganz bestimmten, von der hydraulischen Flüssigkeitspressung herrührenden Wert, welcher in der Fachlitteratur wohl auch den Namen „hydrostatischer Druck" trägt.

Eine genaue Erkenntnis der verschiedenartigen, von dem Systeme der Turbine abhängigen elementaren Schaufeldrucke kann aber schliesslich erst gewonnen werden durch die Betrachtung der Zustandsverhältnisse der Flüssigkeit relativ zu Schaufelflächen von ganz bestimmter Form, Lage und Grösse.

Damit wenden wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zu. Bezüglich der Führung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen setzen wir vorderhand noch voraus, dass diese gezwungen seien, beim Durchfluss durch das Laufrad einer Axialturbine immer in ein und denselben Kreiszylinderflächen um die Radaxe und bei einer Radialturbine in senkrecht dazu gelegenen Ebenen zu verbleiben und innerhalb dieser Flächen selbst kongruente Bahnen zu beschreiben. Die Erreichung eines solchen Bewegungsvorganges würde also tatsächlich eine Einteilung der Laufräder, etwa vermittelst unendlich dünner materieller Scheidewände, in lauter sehr schmale Einzelräder mit unendlich vielen Schaufeln erfordern. Bezüglich des weitern Verhaltens der Flüssigkeit innerhalb dieser Leitflächen muss zwischen Druck- und Ueberdruckturbinen unterschieden werden; denn die allgemeine Wirkungsart der erstern hat immer nur einen einseitig gerichteten Schaufeldruck zur Folge, währenddem sämtliche Zellenwandungen eines Ueberdruckrades eben infolge einer bestimmten Pressung der in dasselbe eintretenden Flüssigkeit stets einem allseitigen Druck unterliegen. Auf die allgemeine Gestaltung der daraus hervorgehenden relativen Bewegungsverhältnisse und der damit verbundenen verschiedenen Arten der Druckübertragungen zwischen Flüssigkeit und Rad werden wir daher auch erst in zweiter Linie zu sprechen kommen.

Nähere Untersuchungen über die Arbeitsabgabe von Wasser an Druckturbinenschaufeln sind schon von Zakikjanz*) ausgeführt

*) Kinetische Analyse der Aktionsturbinen mit freiem Strahl. Civilingenieur 1885. Band 31, Seite 425.

worden und sollen diesbezüglich auch hier in Kürze in etwas anderer Form vorgenommen werden, sich im weitern aber auch auf die in axialem und radialem Sinne geäusserten passiven Raddrucke beziehen.

Da die absolute Geschwindigkeit sich jederzeit aus der relativen und der Umfangsgeschwindigkeit zusammensetzt, so lassen sich offenbar auch die Druckäusserungen irdend eines Massenteilchens durch die momentanen Grössen- und Richtungsänderungen jener beiden Geschwindigkeitskomponenten ausdrücken, womit erst die gewünschte Einsicht in die Wirkungsart der Flüssigkeit auf die Schaufelflächen gewonnen wird. Unter der Annahme, dass die positiven Koordinatenaxen mit der Richtung der Rad- und Durchflussbewegung zusammenfallen und dementsprechend auch die Winkel von der erstern Axe aus in der Richtung nach der zweiten gemessen werden, ergeben sich für den allgemeinen Fall einer Radialturbine nach Fig. 2:

1. *Die Tangentialbeschleunigungen bezw. Kräfte pro Masseneinheit.*

a) bezüglich der Umfangsbewegung:

$$T_u = \frac{du}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} \text{ oder da } \omega \text{ konst.: } T_u = \omega \cdot \frac{dr}{dt}$$

dr lässt sich ausdrücken als: $w \cdot dt \sin \beta$, so dass: $T_u = \omega \cdot w \sin \beta$

b) bezüglich der Relativbewegung: $T_w = \frac{dw}{dt}$

Die Ursachen der Relativbeschleunigung $\frac{dw}{dt}$ liegen im allgemeinen Falle einerseits in einer bestimmten Druckdifferenz dp in der Bewegungsrichtung und anderseits in der Einwirkung von Schwer- und Zentrifugalkraft. Wird mit df ein normal zu w gelegenes Flächenelement bezeichnet und ferner mit g_w die Schwerkraftswirkung pro Masseneinheit in der betreffenden Richtung verstanden, so ist für die relative Flüssigkeitsbewegung folgende sogenannte Fundamentalgleichung ohne weiteres verständlich:

$$df \cdot dp - dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \beta \pm dm \cdot g_w = - dm \cdot \frac{dw}{dt}$$

dieselbe geht übrigens auch aus der frühern Gleichung der leben-

digen Kraft: $v \cdot dp - d\left(\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2g}\right) \pm dA_g = -d\left(\frac{w^2}{2g}\right)$ bezw.:

$$v \cdot dp - \frac{\omega^2 \cdot r \cdot dr}{g} \pm dA_g = -\frac{w \cdot dw}{g}$$

hervor, und zwar durch Multiplikation der letzteren mit $\frac{df}{v}$ in Anbetracht, dass:

$$dm = \frac{df \cdot w \cdot dt \cdot \gamma}{g} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{v} \quad \text{also:}$$

$$\frac{df}{v} = \frac{dm \cdot g}{w \cdot dt} = \frac{dm \cdot g \cdot \sin\beta}{w \cdot dt \cdot \sin\beta} = \frac{dm \cdot g \cdot \sin\beta}{dr}$$

Unter der Voraussetzung der freien Führung eines Massenelementes durch die Schaufel kann eine Druckänderung in der relativen Bewegungsrichtung nicht stattfinden, so dass $dp = 0$ wird und also obige Gleichung für die Relativbewegung in Druckturbinen lautet: $r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta \mp g_w = \frac{dw}{dt}$

2. Die Normalbeschleunigungen bezw. Kräfte pro Masseneinheit:

Dafür sind zunächst aus Fig. 2 die Winkelgeschwindigkeiten zu entnehmen, mit welchen die Richtungsänderungen eines Massenteilchens vor sich gehen:

a) in Bezug auf dessen Umfangsbewegung:

Dadurch, dass das von der Flüssigkeit bestrichene Schaufelelement im allgemeinen von der radialen Richtung abweicht, erleidet die Umfangsgeschwindigkeit u nicht nur eine durch die Winkelgeschwindigkeit des Rades ω gemessene Richtungsänderung, sondern auch noch eine weitere, welche nach Verfluss von dt Sekunden durch den Winkel $d\sigma$ ausgedrückt ist und sich also mit einer Winkelgeschwindigkeit von der Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ vollzieht.

Nach Fig. 2 lässt sich $d\sigma$ schreiben:

$$d\sigma = \frac{w \cdot dt \cdot \cos\beta}{r}, \text{ so dass}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{w \cdot \cos\beta}{r}$$

b) in Bezug auf die Relativbewegung:
ergeben sich die Winkelgeschwindigkeiten der Richtungsänderungen zu:

$\frac{d\delta}{dt}$ infolge der Schaufelkrümmung und

ω infolge der Drehbewegung der Schaufel.

Diesen sämtlichen Ablenkungen entsprechen also folgende Normalbeschleunigungskräfte pro Masseneinheit:

a) bezüglich der Umfangsbewegung:

$$N_u = r \cdot \omega \left(\omega + \frac{w \cdot \cos \beta}{r} \right) = r \cdot \omega^2 + \omega \cdot w \cdot \cos \beta$$

b) bezüglich der Relativbewegung:

$$N_w = w \left(\frac{d\delta}{dt} + \omega \right) = w \cdot \frac{d\delta}{dt} + \omega \cdot w$$

Stellt man nun die verschiedenen Grössen- und Richtungsänderungen, welche die Umfangs- und Relativgeschwindigkeit in dt Sek. erleiden (in endlicher Grösse) nach Fig. 3 dar, und zwar:

durch die Strecke	1	die Grössenänderung	der Umfangsgeschwindigkeit
„ „ „	2	die mit Winkelgeschw. ω vor sich gehende Richtungsänderung	
„ „ „	3	die mit Winkelgeschw. $\frac{d\sigma}{dt}$ vor sich gehende Richtungsänderung	
durch die Strecke	4	die Grössenänderung	der Relativgeschwindigkeit
„ „ „	5	die mit Winkelgeschw. $\frac{d\delta}{dt}$ vor sich gehende Richtungsänderung	
„ „ „	6	die mit Winkelgeschw. ω vor sich gehende Richtungsänderung	

so erhält man auch darüber ein klares Bild, wie die Aenderung der absoluten Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach aus den sechs elementaren Beschleunigungsgrössen hervorgeht.

Die lediglich von der Drehbewegung des Rades herrührenden Ergänzungs-Beschleunigungen der Relativbewegung fallen in die

Richtungen der Streckenelemente 1, 2, 3 und 6 und sind durch die Grössen $\omega \cdot w \cdot \sin\beta$; $r \cdot \omega^2$; $\omega \cdot w \cdot \cos\beta$ und $\omega \cdot w$ in Fig. 4 Diese lassen sich auch ohne weiteres durch die folgenden beiden bekannten Ausdrücke ersetzen:

1) Erste Ergänzungs-Beschleunigung $r \cdot \omega^2$, welcher Wert dem in Fig. 4 mit 2 bezeichneten entspricht und radial nach aussen gerichtet ist.
2) Zweite Ergänzungs-Beschleunigung $2 \cdot \omega \cdot w$, welche Grösse die Resultierende aus den Beschleunigungen 1, 3 und 6 bildet, nornormal zur Schaufelfläche gerichtet ist und für ein innen beaufschlagtes Rad negativ würde.

In nachstehender Tabelle sind die gewonnenen Resultate zusammengestellt und zugleich die Druckkomponenten normal zu der Schaufelfläche für ein aussen beaufschlagtes Rad gebildet.

		Erzeugte Kräfte pro Masseneinheit	Komponenten ⊥ zur Schaufel
a) Einfluss der Aenderung der Umfangsgeschwind.	der Grösse nach	$\omega \cdot w \cdot \sin\beta$	$\omega \cdot w \cdot \sin^2\beta$
	d. Richtung nach	$r \cdot \omega^2 + \omega \cdot w \cdot \cos\beta$	$r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta + \omega \cdot w \cdot \cos^2\beta$
b) Einfluss der Aenderung der Relativgeschwind.	der Grösse nach	$\frac{dw}{dt}$	—
	d. Richtung nach	$w \cdot \frac{d\delta}{dt} + \omega \cdot w$	$w \cdot \frac{d\delta}{dt} + \omega \cdot w$

Die Zerlegung sämtlicher normalen Schaufeldrucke in die Bewegungsrichtung des Rades und senkrecht dazu führt einerseits zur Arbeitskraft und anderseits zu dem Axial- bezw. Radialdrucke, welche Grössen im folgenden an Hand der verschiedenen Dispositionen der Druckräder bestimmt werden sollen, immer auf die Masseneinheit des betreffenden Flüssigkeitsteilchens bezogen.

I. Axiale Druckturbine mit geraden Schaufeln und vertikaler Axe. Fig. 5.

Auf Grund der an die Flüssigkeitsbewegung gestellten Bedingungen dürfen wir die im folgenden in Betracht kommenden

Untersuchungen auch auf die Abwicklung eines einzelnen unendlich schmalen Rades in eine Ebene beziehen. Denkt man sich diese schaufellos und mit der Umfangsgeschwindigkeit u bewegt, so wird darauf ein aus dem Leitrade tretendes Massenelement allgemein die Form der sogenannten neutralen Schaufel beschreiben. Im vorliegenden Falle weicht dieselbe nur infolge der Schwerkraftswirkung von der Schaufelgeraden ab, so dass der darauf geäusserte Normaldruck wird:

$$N = g \cdot \cos(180 - \beta)$$ also die Arbeitskraft:

$$P_u = g \cdot \cos(180 - \beta) \cdot \sin(180 - \beta) = -g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta$$

Bezogen auf die in Fig. 5 gewählten Bezeichnungen lautet mit korrekter Vorzeichenbeachtung die Gleichung der relativen Flüssigkeitsbewegung:

$$-g \cdot \sin\beta = \frac{dw}{dt}$$ denn mit Rücksicht darauf, dass

$$w \cdot dt \cdot \sin\beta = dz \,,$$ also

$$-dz = w \cdot dt \cdot \frac{dw}{g \cdot dt} = \frac{dw^2}{2 \cdot g}$$ ergibt die Integration beider Ausdrücke von 1—2:

$$-(z_2 - z_1) = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \text{Radhöhe.}$$

Mit Benützung obiger Beziehung schreibt sich also:

$$P_u = \cos\beta \cdot \frac{dw}{dt}$$, so dass, multipliziert mit $u \cdot dt$, da u und ferner auch β konstante Grössen sind, sich ergibt:

$$dA = d(w \cdot \cos\beta \cdot u)$$

Nach Fig. 5 ist: $c_u = u + w\cos\beta$ also: $dc_u = d(w \cdot \cos\beta)$ und daher auch $dA = d(c_u \cdot u)$ und

$$A = u(c_{u_1} - c_{u_2})$$

Der Vertikaldruck bestimmt sich an beliebiger Stelle pro Masseneinheit zu:

$$P_z = g \cdot \cos^2\beta = g(1 - \sin^2\beta)$$

oder nach obiger Beziehung für die Relativbewegung:

$$P_z = g + \sin\beta \cdot \frac{dw}{dt} \quad \text{und da } \beta = \text{konstant:}$$

$$P_z = g + \frac{d(w \cdot \sin\beta)}{dt} \quad \text{Es schreibt sich auch: } w \cdot \sin\beta = w_z = c_z,$$

so dass: $P_z = g + \frac{dc_z}{dt}$

Multipliziert man diesen Wert mit dem Massenelement dm und integriert über die ganze Radhöhe, so ergibt sich daraus der von einem ganzen Flüssigkeitsfaden auf die Schaufel ausgeübte Druck, also eine Grösse von unendlich kleiner zweiter Ordnung:

$$(dP_z)_2 = \Sigma\, dm \cdot g + \int \frac{dm}{dt} \cdot dc_z$$

Der Quotient $\frac{dm}{dt}$ bedeutet nichts anderes, als die pro eine Sekunde durch das Querschnittselement des Flüssigkeitsfadens tretende Massengrösse und ist also für den Beharrungszustand konstant, so dass:

$$(dP_z)_2 = \Sigma\, dm \cdot g + \frac{dm}{dt}(c_{z_1} - c_{z_2})$$

Setzen wir schliesslich gleiche Zustandsänderung sämtlicher Massenteilchen voraus und bezeichnen das im Rade befindliche Flüssigkeitsgewicht mit G_R, so lautet der totale vertikale Raddruck:

$$P_{z_\varepsilon} = G_R + M(c_{z_1} - c_{z_2})$$

2. Axiale Druckturbine mit gekrümmten Schaufeln und vertikaler Axe. Fig. 6.

Gegenüber dem vorigen Falle tritt als einzig neue Kraft diejenige infolge der Schaufelkrümmung hinzu, so dass wird:

$$N = -g \cdot \cos\beta + w \cdot \frac{d\beta}{dt} \quad \text{also:}$$

$$P_u = -g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta + w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\beta$$

Nach der Gleichung für relative Bewegung: $-g \cdot \sin\beta = \frac{dw}{dt}$ ist:

$$P_u = \cos\beta \cdot \frac{dw}{dt} + w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\beta$$

Soll ferner die Integration des zweiten Ausdruckes, wie diejenige des ersten, in gleichem Sinne von 2—1 geschehen, so kehrt sich das Vorzeichen des letzteren um, so dass die Arbeitskraft sich schreibt:

$$P_u = \frac{1}{dt}(\cos\beta \cdot dw - w \cdot \sin\beta\, d\beta)$$

$$= \frac{1}{dt}(\cos\beta \cdot dw + w \cdot d\cos\beta) \qquad \text{oder:}$$

$$= \frac{d(w \cdot \cos\beta)}{dt} = \frac{dc_u}{dt} \qquad \text{also:}$$

$$dA = d(c_u \cdot u) \qquad \text{und}$$

$$A = u(c_{u_1} - c_{u_2})$$

Der Vertikaldruck ergibt sich unter analoger Vorzeichenbeachtung:

$$P_z = g + \sin\beta \cdot \frac{dw}{dt} + w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \cos\beta$$

$$= g + \frac{1}{dt}(\sin\beta \cdot dw + w \cdot d\sin\beta)$$

$$= g + \frac{d(w \cdot \sin\beta)}{dt} = g + \frac{dc_z}{dt}$$

Ebenso ergeben sich also wie im vorigen Falle:

$$(dP_z)_2 = \Sigma\, dm \cdot g + \frac{dm}{dt}(c_{z_1} - c_{z_2}) \qquad \text{und:}$$

$$P_{z_\varepsilon} = G_R + M(c_{z_1} - c_{z_2})$$

3. Radiale Druckturbine mit radial gerichteten geraden Schaufeln.

Bei Radialturbinen mit horizontaler Axe ist die Schwerkraftswirkung auf das Rad je nach Ort der Beaufschlagung verschieden und soll davon, um die Gleichungen nicht unnötigerweise zu komplizieren, abgesehen werden,

Im vorliegenden Falle kann der normale Schaufeldruck nur von der zweiten Ergänzungskraft der Relativbewegung herrühren, welche nach Fig. 4 für $\beta = 90°$ bloss aus den Komponenten

1 und 6 hervorgeht, so dass für aussen beaufschlagtes Rad sich ergibt:

$$N = 2 \cdot \omega \cdot w = P_u$$
$$dA = 2 \cdot \omega \cdot w \cdot r \cdot \omega \cdot dt$$

Da $w \cdot dt = dr$ und $\omega =$ konstant, so folgt:

$$dA = d(r^2 \cdot \omega^2)$$ oder da $r \cdot \omega = u = c_u$, so schreibt sich: $dA = d(c_u \cdot u)$ also

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

Ein Radialdruck kann für dieses Rad natürlich nicht existieren.

4. Radiale Druckturbine mit exzentrisch gerichteten geraden Schaufeln. Fig. 7.

Für dieses Beispiel kommt auch noch die zweite Ergänzungskraft zur Geltung, so dass:

$$N = 2 \cdot \omega \cdot w + r \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta$$
$$P_u = (2 \cdot \omega \cdot w + r \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta) \cdot \sin \beta$$
$$dA = (2 \cdot \omega \cdot w + r \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta) \cdot \sin \beta \cdot r \cdot \omega \cdot dt$$

Mit Berücksichtigung, dass nach Gleichung der relativen Bewegung:

$$r \cdot \omega^2 \cdot \sin \beta = \frac{dw}{dt}$$ und ferner:

$$w \cdot dt \cdot \sin \beta = dr$$ folgt:

$$dA = d(r^2 \cdot \omega^2) + \omega \cdot r \cdot \cos \beta \cdot dw$$

Da ω, aber auch $r \cdot \cos \beta$ konstant ist, so schreibt sich auch:

$$dA = d(r^2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot r \cdot \cos \beta \cdot w)$$ oder:

$$dA = d\left\{r \cdot \omega (r \cdot \omega + w \cdot \cos \beta)\right\}$$

Der Ausdruck $r \cdot \omega + w \cdot \cos \beta$ bedeutet nichts anderes, als die absolute Geschwindigkeitskomponente in der Radbewegung $= c_u$, so dass sich auch schreibt:

$$dA = d(c_u \cdot u)$$ und

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

Der Radialdruck bestimmt sich zu:

$$P_r = -2 \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta - r \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\beta$$

$$= -2 \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta - r \cdot \omega^2 + r \cdot \omega^2 \cdot \sin^2\beta \ , \quad \text{so dass}$$

mit Beziehung für die Relativbewegung:

$$P_r = -2 \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta - r \cdot \omega^2 + \frac{dw}{dt} \cdot \sin\beta$$

Setzt man nun für $dw \cdot \sin\beta = d(w \cdot \sin\beta) - w \cdot d\sin\beta$ oder

$$dw \cdot \sin\beta = dc_r - w \cdot \cos\beta \cdot d\beta$$

und berücksichtigt, dass $d\beta = \frac{w \cdot dt \cdot \cos\beta}{r}$ so folgt:

$$P_r = \frac{dc_r}{dt} - 2 \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta - r \cdot \omega^2 - \frac{w^2 \cdot \cos^2\beta}{r} \quad \text{oder}$$

$$= \frac{dc_r}{dt} - \frac{1}{r}(r \cdot \omega + w \cdot \cos\beta)^2 = \frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r}$$

Also ist der pro Flüssigkeitsfaden geäusserte Radialdruck:

$$(dP_r)_2 = \frac{dm}{dt}(c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$

Der Ausdruck $\Sigma dm \frac{c_u^2}{r}$ bedeutet aber nichts anderes, als die Centrifugalkraft, welcher der Flüssigkeitsfaden in seiner absoluten Bewegung unterworfen ist; bezeichnet man diese Grösse im Bezug auf die ganze im Laufrad befindliche Flüssigkeitsmasse mit C_R, so schreibt sich:

$$P_{r_\varepsilon} = M(c_{r_1} - c_{r_2}) - C_R$$

5. Radiale Druckturbine mit gekrümmten Schaufeln. Fig. 2.

Die neu hinzutretende Kraft infolge der Schaufelkrümmung drückt sich pro Masseneinheit aus als: $w \cdot \frac{d\delta}{dt}$.

Nach Fig. 2 ist der Krümmungswinkel:

$$d\delta = d\beta + d\sigma = d\beta + \frac{w \cdot dt \cdot \cos\beta}{r} = d\beta + \frac{dr \cdot \operatorname{ctg}\beta}{r}$$

Also schreibt sich:

$$N = 2 \cdot \omega \cdot w + r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta + w \cdot \frac{d\beta}{dt} + \frac{w \cdot \operatorname{ctg}\beta}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Für gleichen Integrationssinn sämtlicher Grössen von $2-1$ kehrt sich wiederum das Vorzeichen des Ausdruckes mit $d\beta$ um, so dass damit:

$$P_u = 2\omega w \cdot \sin\beta + r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta - w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\beta + \frac{w \cdot \cos\beta}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Berücksichtigt man, dass $w \cdot dt \cdot \sin\beta = dr$, und die Gleichung der relativen Bewegung: $r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta = \frac{dw}{dt}$, so folgt:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^2 \cdot dr^2 + r \cdot \omega \cdot \cos\beta \cdot dw + r \cdot \omega \cdot w \cdot d\cos\beta + \omega \cdot w \cdot \cos\beta \cdot dr \\ &= d(r^2 \cdot \omega^2) + r \cdot d(\omega \cdot w \cdot \cos\beta) + \omega \cdot w \cdot \cos\beta \cdot dr \\ &= d(r^2 \cdot \omega^2) + d(r \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta) \\ &= d\left\{r \cdot \omega\,(r \cdot \omega + w \cdot \cos\beta)\right\} \qquad \text{also wiederum:} \\ dA &= d(c_u \cdot u) \end{aligned}$$

Für den Radialdruck erhält man mit vorstehender Vorzeichenbeachtung:

$$P_r = -2 \cdot \omega \cdot w \cdot \cos\beta - r \cdot \omega^2 + r\omega^2 \cdot \sin^2\beta + w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \cos\beta - w \cdot \frac{w \cdot \cos\beta}{r} \cdot \cos\beta$$

und nach Gleichung der relativen Bewegung:

$$P_r = \sin\beta \cdot \frac{dw}{dt} + w \cdot \frac{d\sin\beta}{dt} - \frac{1}{r}(r \cdot \omega + w \cdot \cos\beta)^2 \text{ also auch:}$$

$$P_r = \frac{d(w \cdot \sin\beta)}{dt} - \frac{c_u^2}{r} = \frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r} \qquad \text{und}$$

$$(dP_r)_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma\, dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$

$$P_{r_\varepsilon} = M(c_{r_1} - c_{r_2}) - C_R$$

Alle diese Detailbetrachtungen führen also einerseits, wie zu erwarten war, auf den allgemein giltigen Ausdruck für die hydraulische Leistung. Anderseits gelangen wir bezüglich der axial und radial gerichteten passiven Raddrucke zu dem Satze, dass sich diese bei Druckturbinen im allgemeinen aus zwei Grössen verschiedener

Art zusammensetzen. Die eine derselben hat auf die sekundliche Flüssigkeitsmasse und die ihr beim Ein- und Austritte des Rades in der betreffenden Richtung zukommenden Geschwindigkeitsgrössen Bezug, währenddem die andere die Wirkung der Schwer- und Centrifugalkraft der im Rade befindlichen Flüssigkeit auf dasselbe zum Ausdruck bringt.

Die bisherigen Beispiele veranschaulichen nun lediglich das rein dynamische Wirkungsprinzip einer Flüssigkeit in Druck- oder Freistrahlturbinen, und wird uns erst die folgende Behandlung der Ueberdruckturbinen zeigen, in welcher Weise ferner der von der potentiellen Energie herrührende, sich allseitig fortpflanzende innere hydraulische Druck der Flüssigkeit auf die Zellenwandungen zur Geltung kommt. Die diesbezüglichen Entwicklungen beziehen wir zunächst wiederum auf einen einzelnen Flüssigkeitsfaden und denken uns diesen von materiellen Wandungen umgeben nach Art der allgemeinen Voraussetzung.

Betrachten wir nach Fig. 8 ein solches Kanalelement (z. B. einer Radialturbine), in welchem von Normalquerschnitt $N—N$ zu Normalquerschnitt der hydraulische Druck variert, so ist wohl leicht zu erkennen, dass die Uebertragung desselben auf die beiden, innerhalb zweier unmittelbar benachbarten konzentrischen Kreisen gelegenen Schaufelelemente zu zwei Kräften führt, welche, hinsichtlich ihrer Wirkung auf das Rad, im allgemeinen von einander verschieden sind. Die Bestimmung derselben wird nun in einfacher Weise dadurch ermöglicht, dass man, wie alle weiteren Figuren zeigen, die Gestaltsänderung des Zellenelementes stufenweise vor sich gehen lässt, wodurch die Flüssigkeit successive von einem bestimmten an der Eintrittsoberfläche herrschenden Druck und Bewegungszustande in den am Austritt des Zellenelementes gewünschten Endzustand übergeführt werden kann. Wir gelangen also auch hier, wie in dem vorangegangenen Abschnitte auf dem Wege der Synthese zu unserem Ziele.

Fügt man zu diesen, lediglich auf der allseitigen Fortpflanzung der hydraulischen Flüssigkeitspressung beruhenden Drucken noch diejenigen bekannten Kräfte hinzu, welche den absoluten, normal zu den Schaufelflächen gerichteten Beschleunigungen eines Flüssigkeitsteilchens entsprechen, so stellt uns die Resultierende sämtlicher

Grössen die totale Wirkung der Flüssigkeit auf das betreffende Zellenelement dar. Diese geht also aus einer ganzen Reihe einzelner Elementardrucke hervor, welche nun im folgenden für die verschiedenen Ueberdruckräder rechnerisch bestimmt werden sollen.

1. Axiale Ueberdruckturbine mit gerader Zellenaxe. Fig. 9 und 10.

Tritt die Flüssigkeit unter einem bestimmten Drucke p_1 stossfrei in das Rad ein, so überträgt sich dieser zunächst direkt auf das zur Zellenaxe parallel gelegene Schaufelelement und übt also auf dasselbe eine Kraft aus von der Grösse: $-df_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot p_1$

Durch die hierauf eintretende kontinuierliche Querschnittsabnahme erleidet die Flüssigkeit eine Relativbeschleunigung und eine ihr entsprechende Abnahme des innern Druckes. Dieser selbst pflanzt sich seitlich auf die Leitflächen fort und führt zu einer in der Richtung der Zellenaxe auf das Rad wirksamen Kraft von der Grösse $\int p \cdot d(df)$. Hat sodann die Flüssigkeit im Austrittsquerschnitte wiederum überall dieselbe Richtung angenommen, so dient das Flächenelement $df_2 \cdot \operatorname{ctg}\beta$ nur noch zu ihrer seitlichen Begrenzung und wird also die auf dasselbe ausgeübte Kraft, analog wie beim Radeintritte $= df_2 \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot p_2$. Neben diesen Druckäusserungen wäre schliesslich auch noch die einseitig wirkende Schwerkraft zu berücksichtigen.

Die nach Fig. 10 auf ein unendlich kurzes Zellenelement der vorigen Art übertragenen Drucke ergeben sich also zu:

1. $-dm \cdot g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta$ infolge der Schwerkraftswirkung.
2. $-\left\{df + d(df)\right\} \cdot \operatorname{ctg}\beta\,(p + dp) \cdot \sin\beta =$
   $-\left\{df + d(df)\right\} \cdot (p + dp) \cdot \cos\beta$
3. $df \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot p \cdot \sin\beta = df \cdot p \cdot \cos\beta$

Die beiden Ausdrücke 2 und 3 bedeuten die Kräfte, welche auf die zwei ebenen, unter dem Drucke $p + dp$ und p stehenden Flächenelemente in der Bewegungsrichtung des Rades ausgeübt werden, und bilden, da Winkel β = konstant, ein vollständiges Differential:

2 und 3. $-\left\{df \cdot dp + p \cdot d(df)\right\} \cdot \cos\beta$, zu welchem Werte natürlich auch die Summation von 2 und 3 führt, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen vierter Ordnung; mit Rücksicht darauf folgt ferner:

4. $p \cdot d(df) \cdot \cos\beta$, infolge der Querschnittsverengung.

Die Addition sämtlicher Grössen ergibt den gesuchten, von einem einzelnen Flüssigkeitselemente geäusserten Arbeitsdruck:

$$(dP_u)_3 = -dm \cdot g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta - df \cdot dp \cdot \cos\beta$$

Nach der Gleichung der relativen Bewegung ist aber für Ueberdruckturbinen (siehe Seite 12), unter gleicher Vorzeichenbeachtung wie bei Druckturbinen:

$$-dm \cdot g \cdot \sin\beta - df \cdot dp = dm \cdot \frac{dw}{dt}$$ so dass:

$$(dP_u)_3 = dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \cos\beta$$ oder da β = konstant:

$$(dP_u)_3 = dm \cdot \frac{d(w \cdot \cos\beta)}{dt} = dm \cdot \frac{dc_u}{dt}$$ und auf die Masseneinheit des betreffenden Flüssigkeitsteilchens bezogen:

$P_u = \frac{dc_u}{dt}$. Mit dem Wegelement $u \cdot dt$ multipliziert, ergibt sich die Elementararbeit zu:

$dA = u \cdot dc_u$, oder, da u = konstant:

$dA = d(c_u \cdot u)$, und also die pro Masseneinheit des betrachteten Flüssigkeitselementes im Rade verrichtete Arbeit:

$$A = u(c_{u_1} - c_{u_2})$$

Der Axialdruck setzt sich aus folgenden Grössen zusammen:

1. $dm \cdot g \cdot \cos^2\beta = dm \cdot g\,(1 - \sin^2\beta)$
2. $\left\{df + d(df)\right\} \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot (p + dp) \cdot \cos\beta =$
2. $\left\{df + d(df)\right\} \cdot (p + dp) \cdot \frac{1 - \sin^2\beta}{\sin\beta} =$
2. $\left\{\frac{df + d(df)}{\sin\beta} - [df + d(df)] \cdot \sin\beta\right\}(p + dp)$
3. $-\left(\frac{df}{\sin\beta} - df \cdot \sin\beta\right) \cdot p$
4. $p \cdot d(df) \cdot \sin\beta$

deren Summation ergibt unter der zulässigen Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen vierter Ordnung:

$$(dP_z)_3 = dm \cdot g + d\left(\frac{df \cdot p}{\sin \beta}\right) - dm \cdot g \cdot \sin^2 \beta - df \cdot dp \cdot \sin \beta$$

sodass nach Gleichung der relativen Bewegung:

$$-dm \cdot g \cdot \sin \beta - df \cdot dp = dm \cdot \frac{dw}{dt}$$

und mit Rücksicht darauf, dass: $dw \cdot \sin \beta = dc_z$:

$$(dP_z)_3 = dm \cdot g + d\left(\frac{df \cdot p}{\sin \beta}\right) + dm \cdot \frac{dc_z}{dt}$$

Also folgt nach Integration über die ganze Radhöhe der von einem Flüssigkeitsfaden ausgeübte Axialdruck:

$$(dP_z)_2 = \Sigma dm \cdot g + \frac{1}{\sin \beta}(df_1 \cdot p_1 - df_2 \cdot p_2) + \frac{dm}{dt}(c_{z_1} - c_{z_2}) .$$

Setzen wir schliesslich wiederum gleiche Zustandsänderung sämtlicher Flüssigkeitsteilchen voraus und bezeichnen wir die freien Radoberflächen mit $\frac{f_1}{\sin \beta}$ bezw. $\frac{f_2}{\sin \beta}$, so ergibt sich der totale axiale Raddruck zu:

$$P_{z_\varepsilon} = G_R + \frac{1}{\sin \beta}(f_1 p_1 - f_2 p_2) + M(c_{z_1} - c_{z_2})$$

Währenddem also die hydraulische Leistung der Ueberdruckturbine sich genau nach ein und derselben schon für die Druckturbinen gewonnenen Gleichung berechnet, so unterscheiden sich dagegen ihre Axialdrucke noch um eine ganz bestimmte Grösse von einander, welche eben von der potentiellen Energie der Flüssigkeit herrührt und gleich ist der Differenz der über den freien Radoberflächen herrschenden hydraulischen Drucke.

Bei der materiellen Führung der einzelnen Flüssigkeitsfäden kann die innere Pressung normal zu den Leitflächen nur um unendlich kleine Werte varieren und ist daher ihrer endlichen Grösse nach eben identisch mit dem hydraulischen Flüssigkeitsdruck, welcher stets einer gewissen Energiegrösse gleichkommt. Im Gegensatz dazu geht der gesamte innere messbare Druck eines kompakten Flüssigkeits-

stromes sowohl aus der hydraulischen Pressung hervor, als auch aus den nunmehr ebenfalls endlichen Druckgrössen, welche den verschiedenen der Flüssigkeit durch ihre Führungsflächen erteilten Zwangsbeschleunigungen entsprechen.

2. Axiale Ueberdruckturbine mit gekrümmten Schaufeln. Fig. 11.

Dabei kommt eine weitere, auf der allseitigen Ausbreitung des hydraulischen Druckes beruhende Kraft auf das Rad zur Geltung und zwar infolge davon, dass die zwischen zwei Normalquerschnitten gelegenen Schaufelelemente ungleich lang sind. Die Wirkung dieses Umstandes allein äussert sich also offenbar dadurch, dass nach der Seite des längern Schaufelteilchens ein Ueberdruck entsteht von der Grösse der Differenz der beiden Flächenelemente, multipliziert mit der daselbst herrschenden spez. hydraulischen Pressung.

Ausserdem wird durch die Schaufelkrümmung, wie bei den Druckturbinen noch eine bestimmte einseitig gerichtete Reaktionskraft erzeugt, womit sich folgende Werte hinsichtlich der Arbeitskraft ergeben:

1. $-dm \cdot g \cdot \cos\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right)$, welcher Ausdruck mit Rücksicht auf die gegenseitigen Grössen sich schreibt:

$$-dm \cdot g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta$$

2. $\left\{df + d(df)\right\} \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot (p + dp) \cdot \sin\beta =$

$$-df \cdot p \cdot \cos\beta - df \cdot dp \cdot \cos\beta - d(df) \cdot p \cdot \cos\beta$$

3. $df \cdot \operatorname{ctg}(\beta + d\beta) \cdot p \cdot \sin(\beta + d\beta)$ ist wieder mit Rücksicht auf gleichen Integrationssinn sämtlicher Grössen zu schreiben:

$df \cdot p \cdot \cos(\beta - d\beta)$ also gleich:

$df \cdot p \cdot \cos\beta + df \cdot p \cdot \sin\beta \cdot d\beta$

4. $p \cdot d(df) \cdot \cos\beta$, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen vierter Ordnung und ebenso:

5. $-dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right)$, herrührend von der relativen Ablenkung des Massenteilchens infolge der Schaufelkrümmung, wie bei Druckturbinen.

5. $-dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\beta$

Die Wirkung des hydraulischen Druckes aufgenommen durch die beiden infolge der Schaufelkrümmung ungleich grossen Flächenelemente, ist ausgedrückt durch:

6. $-\left\{df + d(df)\right\} \cdot d\beta \cdot p \cdot \sin\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right) =$

$- df \cdot d\beta \cdot p \cdot \sin\beta$

Nach Summation sämtlicher Grössen erhalten wir:

$$(dP_u)_3 = - dm \cdot g \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta - df \cdot dp \cdot \cos\beta - dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \sin\beta$$

und mit Gleichung der relativen Bewegung:

$$-dm \cdot g \cdot \sin\beta - df \cdot dp = dm \cdot \frac{dw}{dt}$$ folgt:

$$(dP_u)_3 = dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \cos\beta + dm \cdot w \cdot \frac{d\cos\beta}{dt}$$ oder:

$$= dm \cdot \frac{d(w \cdot \cos\beta)}{dt} = dm \cdot \frac{dc_u}{dt}$$ also:

$$P_u = \frac{dc_u}{dt}$$ und mit $u \cdot dt$ multipliziert:

$$dA = d(c_u \cdot u)$$ und schliesslich:

$$A = u(c_{u_1} - c_{u_2})$$

Der axiale Raddruck geht aus folgenden Komponenten hervor:

1. $dm \cdot g \cdot \cos^2\beta = dm \cdot g - dm \cdot g \cdot \sin^2\beta$

2. $\left\{\frac{df + d(df)}{\sin\beta} - [df + d(df)] \cdot \sin\beta\right\}(p + dp)$

3. $-\left\{\frac{df}{\sin(\beta - d\beta)} - df \cdot \sin(\beta - d\beta)\right\} p =$

$-\left\{\frac{df}{\sin(\beta - d\beta)} - df \cdot \sin\beta + df \cdot \cos\beta \cdot d\beta\right\} p$

4. $p \cdot d(df) \cdot \sin\beta$

5. $dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \cos\beta$

6. $df \cdot d\beta \cdot p \cdot \cos\beta$

Die Addition dieser Werte ergibt:

$$(dP_z)_3 = dm \cdot g + d\left(\frac{df \cdot p}{\sin\beta}\right) - dm \cdot g \cdot \sin^2\beta - df \cdot dp \cdot \sin\beta + dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cos\beta$$

Mit Gleichung der relativen Bewegung:

$$(dP_z)_3 = dm \cdot g + d\left(\frac{df \cdot p}{\sin\beta}\right) + dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \sin\beta + dm \cdot w \cdot \frac{d\sin\beta}{dt} \quad \text{also:}$$

$$= dm \cdot g + d\left(\frac{df \cdot p}{\sin\beta}\right) + dm \cdot \frac{dc_z}{dt} \quad \text{und}$$

$$(dP_z)_2 = \Sigma dm \cdot g + \frac{df_1 p_1}{\sin\beta_1} - \frac{df_2 p_2}{\sin\beta_2} + \left(\frac{dm}{dt}\right)(c_{z_1} - c_{z_2})$$

$$P_{z_\varepsilon} = G_R + \frac{f_1 p_1}{\sin\beta_1} - \frac{f_2 p_2}{\sin\beta_2} + M(c_{z_1} - c_{z_2})$$

Als letzte der verschiedenen Turbinenklassen bleibt jetzt noch diejenige der radialen Ueberdruckräder zu behandeln übrig. Neue Arten von Druckäusserungen einer Flüssigkeit lernen wir bei den diesbezüglichen Betrachtungen keine mehr kennen; dagegen finden wir schliesslich bei dem letzten Beispiele die Gesamtheit aller bisher besprochenen Elementarkräfte an dem Zustandekommen des totalen Raddruckes beteiligt.

Bei dieser Gattung von Rädern wird es sich um die Aufstellung derjenigen Drucke handeln, welche auf die zwischen zwei konaxialen Zylinderflächen gelegenen Flächenelemente übertragen werden. Von der Wirkung der Schwerkraft innerhalb des Rades wird aus denselben Gründen, wie bei den Druckturbinen abgesehen.

Als einfachstes Rad dieser Kategorie erscheint wohl die:

3. Radiale Ueberdruckturbine mit gerader radial gerichteter Zellenaxe.

Der Allgemeinheit der Aufgabe halber sei variabler Zellenquerschnitt vorausgesetzt.

Als einzige Kraft in der Richtung der Radbewegung kommt die zweite Ergänzungskraft zur Geltung und ist:

$$(dP_u)_3 = 2 \cdot dm \cdot \omega \cdot w \quad \text{oder:}$$

$$P_u = 2 \cdot \omega \cdot w \,, \quad \text{so dass multipliziert mit } r \cdot \omega \cdot dt$$

$$dA = 2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot w \cdot dt = 2r \cdot \omega^2 \cdot dr = d(r^2 \cdot \omega^2)$$

Da $r \cdot \omega = u = c_u$, so folgt:

$dA = d(c_u \cdot u)$ und

$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$

Der Radialdruck rührt einzig und allein von der Querschnittsänderung her und ist daher:

$$(dP_r)_3 = p \cdot d(df) = d(df \cdot p) - df \cdot dp$$

Für Radialturbinen lautet die Gleichung der relativen Bewegung (siehe Seite 12):

$$-df \cdot dp + dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta = dm \cdot \frac{dw}{dt} \quad ,$$ so dass:

$$(dP_r)_3 = d(df \cdot p) + dm \cdot \frac{dw}{dt} - dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta$$

Da für vorliegendes Beispiel: $w = c_r$; $r \cdot \omega = c_u$ und $\beta = 90^0$, so schreibt sich auch:

$$(dP_r)_3 = d(df \cdot p) + dm \cdot \frac{dc_r}{dt} - dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$ also:

$$(dP_r)_2 = df_1 p_1 - df_2 p_2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)(c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$ und:

$$P_{r_\varepsilon} = f_1 p_1 - f_2 p_2 + M(c_{r_1} - c_{r_2}) - C_R$$

4. Radiale Ueberdruckturbine mit gerader excentrisch verlaufender Zellenaxe. Fig. 12.

Für diesen Fall ist es zweckmässig, direkt die einzelnen Momentengrössen aufzustellen, wofür ohne Schwierigkeit, unter Vorzeichenbeachtung für gleichen Integrationssinn aller Grössen, folgt:

1. $-\{df + d(df)\} \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot (p + dp) \cdot r \cdot \sin\beta =$
   $-df \cdot \cos\beta \cdot p \cdot r - df \cdot \cos\beta \cdot dp \cdot r - d(df) \cdot \cos\beta \cdot p \cdot r$
2. $df \cdot \operatorname{ctg}(\beta - d\beta) \cdot p \cdot (r - dr) \cdot \sin(\beta - d\beta) =$
   $df(\cos\beta + \sin\beta \cdot d\beta) \cdot p \cdot (r - dr) =$
   $df \cdot \cos\beta \cdot p \cdot r - df \cdot \cos\beta \cdot p \cdot dr + df \cdot \sin\beta \cdot d\beta \cdot p \cdot r =$
   $df \cdot \cos\beta \cdot p \cdot r - df \cdot p \cdot d(r \cdot \cos\beta)$

Da speziell für vorliegenden Fall $r \cdot \cos\beta$ = konstant, so folgt:

2. $df \cdot \cos\beta \cdot p \cdot r$
3. $p \cdot d(df) \cdot r \cdot \cos\beta$

4. $2 \cdot dm \cdot \omega \cdot w \cdot r \cdot \sin\beta =$

$$2 \cdot dm \cdot \omega \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} = dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt}$$

5. $dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta \cdot r \cdot \sin\beta$

Die Summation sämtlicher Werte ergibt das von einem Massenelement ausgeübte Drehmoment zu:

$$(dM_T)_3 = -df \cdot dp \cdot r \cdot \cos\beta + dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt} + dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta \cdot r \cdot \sin\beta$$

Nach Gleichung der relativen Bewegung:

$$-df \cdot dp + dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin\beta = dm \cdot \frac{dw}{dt}$$ folgt:

$$(dM_T)_3 = dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot r \cdot \cos\beta + dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt}$$

Da $r \cdot \cos\beta =$ konstant, so schreibt sich auch:

$$(dM_T)_3 = dm \cdot \frac{d\left\{r(w \cdot \cos\beta + r \cdot \omega)\right\}}{dt} = dm \cdot \frac{d(r \cdot c_u)}{dt}$$

Also wird das von der Masseneinheit des betreffenden Flüssigkeitselementes auf das Rad übertragene Drehmoment:

$$M_T = \frac{d(r \cdot c_u)}{dt}$$ und mif $\omega \cdot dt$ multipliziert:

$$dA = d(r \cdot \omega \cdot c_u) = d(c_u \cdot u)$$ also

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

Der Radialdruck wird in korrekter Weise so erhalten, dass zunächst die einzelnen Elementarkräfte auf die ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Flächenteilchen bestimmt und hierauf ihre Komponenten nach ein und derselben Richtung unter Winkel β gebildet werden. Damit ergeben sich folgende Werte:

1. $\left\{df + d(df)\right\} \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot (p + dp) \cdot \cos\beta =$

$$\frac{df + d(df)}{\sin\beta} \cdot (p + dp) - \left\{df + d(df)\right\}(p + dp) \cdot \sin\beta =$$

$$\frac{df + d(df)}{\sin\beta} \cdot (p + dp) - df \cdot p \cdot \sin\beta - df \cdot dp \cdot \sin\beta - d(df) \cdot p \cdot \sin\beta$$

2. $-df \cdot \operatorname{ctg}(\beta - d\beta) \cdot p \cdot \cos\beta$

Wird:

$$\cos\beta = \cos\left\{(\beta - d\beta) + d\beta\right\} = \cos(\beta - d\beta) - \sin(\beta - d\beta)\cdot d\beta$$

gesetzt, so folgt:

$$2. \quad -\frac{df}{\sin(\beta - d\beta)}\cdot p + df\cdot\sin(\beta - d\beta)\cdot p + df\cdot\cos(\beta - d\beta)\cdot d\beta\cdot p$$

Da ferner:

$$\sin\beta = \sin\left\{(\beta - d\beta) + d\beta\right\} = \sin(\beta - d\beta) + \cos(\beta - d\beta)\cdot d\beta$$

so ergibt sich:

$$2. \quad -\frac{df}{\sin(\beta - d\beta)}\cdot p + df\cdot p\cdot\sin\beta$$

$$3. \quad p\cdot d(df)\cdot\sin\beta$$

$$4. \quad -2\cdot dm\cdot\omega\cdot w\cdot\cos\beta$$

$$5. \quad -dm\cdot r\cdot\omega^2\cdot\cos^2\beta$$

Die Summation führt zu:

$$(dP_r)_3 = d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) - df\cdot dp\sin\beta - 2\cdot dm\cdot\omega\cdot w\cdot\cos\beta - dm\cdot r\cdot\omega^2\cdot\cos^2\beta$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung der relativen Bewegung:

$$(dP_r)_3 = d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) + dm\cdot\frac{dw}{dt}\cdot\sin\beta - 2\cdot dm\cdot\omega\cdot w\cdot\cos\beta - dm\cdot r\cdot\omega^2$$

$$= d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) + dm\cdot\frac{d(w\cdot\sin\beta)}{dt} - dm\cdot w\cdot\frac{\cos\beta\cdot d\beta}{dt} -$$

$$- 2\cdot dm\cdot\omega\cdot w\cdot\cos\beta - dm\cdot r\cdot\omega^2$$

Da $d\beta = \frac{w\cdot dt\cdot\cos\beta}{r}$, so folgt schliesslich:

$$(dP_r)_3 = d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) + dm\cdot\frac{d(w\cdot\sin\beta)}{dt} - dm\cdot\frac{1}{r}(w\cdot\cos\beta + r\omega)^2$$

oder also:

$$= d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) + dm\cdot\frac{dc_r}{dt} - dm\cdot\frac{{c_u}^2}{r} \quad \text{und}$$

$$(dP_r)_2 = \frac{df_1\cdot p_1}{\sin\beta_1} - \frac{df_2\cdot p_2}{\sin\beta_2} + \left(\frac{dm}{dt}\right)(c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma\, dm\cdot\frac{{c_u}^2}{r}$$

$$P_{r_\varepsilon} = \frac{f_1\cdot p_1}{\sin\beta_1} - \frac{f_2\cdot p_2}{\sin\beta_2} + M(c_{r_1} - c_{r_2}) - C_R$$

5. Die radiale Ueberdruckturbine mit gekrümmten Schaufeln.

Fig. 13.

Nach vorstehendem Beispiele lassen sich die beiden Ausdrücke 1 und 2 kurzweg schreiben:

1. u. 2. $-d(df \cdot p \cdot r \cdot \cos\beta) =$

$$-df \cdot r \cdot \cos\beta \cdot dp - df \cdot p \cdot d(r \cdot \cos\beta) - p \cdot r \cdot \cos\beta \cdot d(df)$$

3. $p \cdot d(df) \cdot r \cdot \cos\beta$

4. $dm \cdot \dfrac{d(\omega \cdot r^2)}{dt}$

5. $dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta \cdot r \cdot \sin\beta$

6. Da sich wiederum der Krümmungswinkel ausdrückt als:

$$d\delta = d\beta + d\sigma \quad \text{und} \quad d\sigma = \frac{dr \cdot \operatorname{ctg}\beta}{r} = \frac{w \cdot dt \cdot \cos\beta}{r}$$

so folgt, mit Rücksicht auf gleichen Integrationssinn aller Grössen, das vom einseitigen Krümmungsdrucke erzeugte Moment zu:

6. $$-dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot r \cdot \sin\beta + dm \cdot w \cdot \cos\beta \cdot \frac{dr}{dt} =$$

$$dm \cdot w \cdot \frac{d(r \cdot \cos\beta)}{dt}$$

7. Der hydraulische Flüssigkeitsdruck, welcher sich auf die beiden unter Winkel $d\delta$ gelegenen Schaufelteilchen überträgt, führt zu dem Momente: $-df \cdot p \cdot d\beta \cdot r \cdot \sin\beta + df \cdot p \cdot \dfrac{dr \cdot \operatorname{ctg}\beta}{r} \cdot r \cdot \sin\beta = df \cdot p \cdot d(r \cdot \cos\beta)$

Nach Summation sämtlicher Grössen verbleibt:

$$(dM_T)_3 = -df \cdot dp \cdot r \cdot \cos\beta + dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt} + dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\beta \cdot r \cdot \sin\beta +$$

$$+ dm \cdot w \cdot \frac{d \cdot (r \cdot \cos\beta)}{dt}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung der relativen Bewegung:

$$(dM_T)_3 = dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot r \cdot \cos\beta + dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt} + dm \cdot w \cdot \frac{d(r \cdot \cos\beta)}{dt}$$

$$= dm \cdot \frac{d(w \cdot r \cdot \cos\beta)}{dt} + dm \cdot \frac{d(\omega \cdot r^2)}{dt}$$

$$= dm \cdot \frac{d\left\{r(w \cdot \cos\beta + r \cdot \omega)\right\}}{dt} = dm \cdot \frac{d(r \cdot c_u)}{dt}$$

$$M_T = \frac{d(r \cdot c_u)}{dt}$$ und also:

$$dA = \frac{d(r \cdot \omega \cdot c_u)}{dt} = \frac{d(u \cdot c_u)}{dt}$$

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

Der Radialdruck setzt sich aus folgenden elementaren Grössen zusammen:

1. $\frac{df + d(df)}{\sin \beta}(p + dp) - df \cdot p \cdot \sin \beta - df \cdot dp \cdot \sin \beta - d(df) \cdot p \cdot \sin \beta$

2. $- df \cdot \operatorname{ctg}(\beta - d\beta) \cdot p \cdot \cos(\beta + d\delta)$

Da nämlich die Kräftezerlegung für ein einzelnes Zellenelement nach ein und derselben Richtung zu geschehen hat, so ist vorstehender Ausdruck mit $\cos(\beta + d\delta)$ zu multiplizieren, so dass sich weiter ergibt:

2. $- df \cdot \operatorname{ctg}(\beta - d\beta) \cdot p \cdot \cos(\beta - d\beta + d\sigma) =$

$$- df \cdot \operatorname{ctg}(\beta - d\beta) \cdot p \cdot \left\{\cos(\beta - d\beta) - \sin(\beta - d\beta) \cdot d\sigma\right\} =$$

$$- \frac{df \cdot p}{\sin(\beta - d\beta)} + df \cdot p \cdot \sin(\beta - d\beta) + df \cdot \cos(\beta - d\beta) \cdot p \cdot d\sigma =$$

$$- \frac{df \cdot p}{\sin(\beta - d\beta)} + df \cdot p \cdot \sin \beta - df \cdot p \cdot \cos \beta \cdot d\beta + df \cdot \cos \beta \cdot p \cdot d\sigma$$

3. $p \cdot d(df) \cdot \sin \beta$

4. $- 2 \cdot dm \cdot \omega \cdot w \cdot \cos \beta$

5. $- dm \cdot r \omega^2 \cdot \cos^2 \beta$

6. $dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \cos \beta - dm \cdot \frac{w^2 \cdot \cos^2 \beta}{r}$ wie bei Druckturbinen.

7. $df \cdot d\beta \cdot p \cdot \cos \beta - df \cdot d\sigma \cdot p \cdot \cos \beta$

Die Addition dieser Grössen ergibt wiederum:

$$(dP_r)_3 = \begin{cases} d\left(\frac{df \cdot p}{\sin \beta}\right) - df \cdot dp \cdot \sin \beta - 2 \cdot dm \cdot \omega \cdot w \cdot \cos \beta \\ - dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \beta + dm \cdot w \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot \cos \beta - dm \cdot \frac{w^2 \cdot \cos^2 \beta}{r} \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung der relativen Bewegung:

$$(dP_r)_3 = \begin{cases} d\left(\frac{df \cdot p}{\sin\beta}\right) + dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \sin\beta + dm \cdot w \cdot \frac{d\sin\beta}{dt} \\ -\frac{dm}{r}(w \cdot \cos\beta + r \cdot \omega)^2 \end{cases}$$

$$= d\left(\frac{df \cdot p}{\sin\beta}\right) + dm \cdot \frac{dc_r}{dt} - dm\frac{c_u^2}{r}$$ also auch:

$$(dP_r)_2 = \frac{df_1 \cdot p_1}{\sin\beta_1} - \frac{df_2 \cdot p_2}{\sin\beta_2} + \frac{dm}{dt}(c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$

$$P_{r_\varepsilon} = \frac{f_1 \cdot p_1}{\sin\beta_1} - \frac{f_2 \cdot p_2}{\sin\beta_2} + M \cdot (c_{r_1} - c_{r_2}) - C_R$$

Lassen wir schliesslich von den einzelnen elementaren Drehmomenten des vorliegenden Rades diejenigen ausser Betracht, die von seiner Drehbewegung herrühren, so führt die Summation der übrigbleibenden Grössen zu dem bekannten Ausdrucke für das gesamte auf ein Leitrad einer Radialturbine ausgeübte Drehmoment, nämlich:

1. u. 2. $-df \cdot r \cdot \cos\beta \cdot dp - df \cdot p \cdot d(r \cdot \cos\beta) - p \cdot r \cdot \cos\beta \cdot d(df)$

3. $p \cdot d(df) \cdot r \cdot \cos\beta$

6. $dm \cdot w \cdot \frac{d(r \cdot \cos\beta)}{dt}$

7. $df \cdot p \cdot d(r \cdot \cos\beta)$

Also folgt nach der Gleichung der relativen Bewegung:

$$(dM_T)_3 = dm \cdot \frac{dw}{dt} \cdot r \cdot \cos\beta + dm \cdot w \cdot \frac{d(r \cdot \cos\beta)}{dt} = dm \cdot \frac{d(w \cdot \cos\beta \cdot r)}{dt}$$

$$= dm \cdot \frac{d(c_u \cdot r)}{dt}$$

$$(dM_T)_2 = \frac{dm}{dt} \cdot (c_{u_1} \cdot r_1 - c_{u_2} \cdot r_2)$$

also für gleichen Bewegungszustand sämtlicher Massenteilchen:

$$M_{T_\varepsilon} = M \cdot (c_{u_1} \cdot r_1 - c_{u_2} \cdot r_2)$$

Das Gesamtergebnis all der bisherigen Betrachtungen über die Wirkungsweise von Flüssigkeiten in Turbinenrädern lässt sich nun kurz etwa in folgende Worte zusammenfassen:

Je nachdem die dem Laufrade gebotene Flüssigkeit nur kinetische, oder zugleich auch potentielle Energie besitzt, so geht der gesamte

Raddruck aus Kräften nur einerlei oder zweierlei Natur hervor. Im erstern Falle, also bei allen Aktions-, Druck- oder Freistrahlturbinen ist nämlich eine Druckäusserung, ganz analog wie bei festen Körpern, nur dadurch möglich, dass die einzelnen Massenteilchen an ihrem freien Laufe durch bestimmte Leitflächen gehindert werden. Der darauf ausgeübte Druck ist immer nur ein einseitig gerichteter und einzig und allein nur von der Masse der betreffenden Flüssigkeit und ihrer Bewegungsänderung abhängig. Auch im zweiten Falle, d. h. bei allen Ueberdruck- oder Reaktionsturbinen haben wir es mit Kräften der vorigen Art zu tun, welche eben bestimmten, normal zu den Schaufelflächen gerichteten Beschleunigungsgrössen der einzelnen Massenteilchen entsprechen, an deren Zustandekommen nunmehr sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie der Flüssigkeit beteiligt sind. Ausserdem haben wir jetzt aber auch noch diejenigen Drucke zu berücksichtigen, welche die Flüssigkeit vermöge ihrer hydraulischen Pressung auf die sie allseitig umgebenden Zellenwandungen ausübt. Währenddem nun die hydraulische Leistung sowohl für Druck- als Ueberdruckturbinen immer durch eine und dieselbe Gleichung rein dynamischen Charakters bestimmt ist, so ist dies inbezug auf die passiven Axial- und Radialdrucke der beiden Turbinengattungen nicht mehr der Fall. Die betreffenden Ausdrücke einer Ueberdruckturbine unterscheiden sich vielmehr gegenüber denjenigen einer Druckturbine immer noch um die Differenz der über den freien Oberflächen der Zellen herrschenden Drucke.

In Anbetracht dieser Verhältnisse ist wohl vorauszusehen, dass auch für die allgemeine Disposition eines Turbinenrades nach Fig. 14*) die der Aenderung der absoluten Bewegung eines Massenelementes entsprechende Reaktion wohl in der Richtung der Radbewegung nichts anderes als die Umfangskraft bedeutet, so dass offenbar auch in diesem Falle die hydraulische Leistung einzelner Teilturbinen nach der bekannten, eben ganz allgemeinen Gleichung sich berechnen lässt, was übrigens aus den folgenden Untersuchungen noch hervorgehen wird. Ebenso werden die Axial- und Radialkomponenten der vorigen Reaktionskraft wohl für Druckturbinen die totalen, in

*) Wie Figur zeigt, ist an ein Francis-Rad gedacht.

diesen beiden Richtungen geäusserten passiven Raddrucke bedeuten; dagegen wird wiederum bei Ueberdruckturbinen neben den Kräften, welche den normal zu den Leitflächen gerichteten Massenbeschleunigungen entsprechen, auch noch den aus der allseitigen Fortpflanzung der hydraulischen Flüssigkeitspressung hervorgehenden Flächendrucken Rechnung zu tragen sein.

Die Radialkomponente der vorigen Reaktionskraft lässt sich nun auch in analoger Weise, wie es an früherer Stelle bezüglich der Arbeitskraft geschehen, zusammensetzen aus:

1. derjenigen Komponente, welche von der Verzögerung der absoluten Radialgeschwindigkeit herrührt, pro Massenelement gleich:

$$dm \cdot \frac{dc_r}{dt}$$

2. derjenigen Komponente, welche der Richtungsänderung der Tangentialgeschwindigkeit entspricht, also für Aussenbeaufschlagung gleich:

$$-dm \cdot c_u \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Da $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_u}{r}$, so ergibt sich die pro Massenelement erzeugte Reaktionskraft in radialer Richtung zu:

$$dm \cdot \frac{dc_r}{dt} - dm \cdot \frac{c_u^2}{r},$$

also für einen ganzen Flüssigkeitsfaden:

$$(dP_r')_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right)(c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma dm \cdot \frac{c_u^2}{r}$$ d. h. wie

zu erwarten war, gelangen wir zu dem bereits auf Grund der relativen Bewegungsverhältnisse abgeleiteten Ausdrucke für die Radialkomponente des normalen Schaufeldruckes einer Aktionsturbine.

Der gleichartige Vertikaldruck ergibt sich ohne weiteres zu:

$$(dP_z')_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{z_1} - c_{z_2}) + \Sigma dm \cdot g$$

Soll jetzt ferner neben den Kräften voriger Art auch noch die Wirkung des hydraulischen Flüssigkeitsdruckes auf das Rad Berücksichtigung finden, so müssen wir eben die Grössen- und Längen-

verhältnisse der unter diesem Drucke stehenden Zellenwandungen näher in Betracht ziehen. Die bisherige Abhandlung lehrt uns nun bereits, dass bei Ueberdruckturbinen der totale passive Radial- oder Axialdruck, ausgeübt auf ein einseitig gekrümmtes Zellenelement mit parallel, bezw. konzentrisch zu einander verlaufenden Ein- und Austrittsflächen, gegenüber demjenigen einer Druckturbine sich stets noch um die Differenz der über den vorigen Flächen herrschenden Flüssigkeitspressungen unterscheidet.

Für vorliegenden Fall denken wir uns zunächst nach Fig. 14 die auf einem Kreisringelement gelegenen, einer reinen Radialturbine angehörigen Schaufelschnitte auf eine Kegelfläche mit der Erzeugenden O_1—K_1 aufgewickelt und die freien Oberflächen der damit sich ergebenden Zellenelemente durch die zwei Kegelflächen mit den Erzeugenden O_2—K_2 bezw. O_3—K_3 gebildet.

Zum Zwecke der Bestimmung der Wirkung dieser, einzig und allein mit der Aufwicklung auf die Kegelfläche verbundenen in Fig. 15 veranschaulichten Krümmung der einzelnen Zellenelemente, greifen wir aus einem solchen ein ebenfalls zwischen zwei konaxialen Kegelflächen mit parallelen Erzeugenden gelegenes trapezförmiges Stückchen heraus. Dann ist nach Fig. 15 zu erkennen, dass die auf seine vier Seitenflächen vermöge der hydraulischen Flüssigkeitspressung ausgeübten Drucke in der Richtung des jeweiligen Krümmungsradius sich gegenseitig aufheben. Die Wirkung dieser betrachteten Krümmung liegt also lediglich darin, dass das Flüssigkeitsteilchen eine derselben entsprechende Normalbeschleunigung erleidet; die damit verbundene Kraft geht durch die Turbinenaxe und hat daher auf die Arbeitsleistung des Rades keinen Einfluss.

Der nunmehr trapezförmige Zellenquerschnitt (siehe Fig. 15 und 16) hat ferner keine Aenderung der Ausdrücke der elementaren Druckäusserungen zur Folge, wenn diese schon unter der Annahme eines rechteckigen Durchflussquerschnittes abgeleitet wurden. Dies lehrt uns auf einfache Weise die Anwendung des Gesetzes der gleichmässigen Druckfortpflanzung im Innern einer Flüssigkeit, welches lautet: Steht ein ganz beliebig geformtes Gefäss unter einem bestimmten innern Drucke, so ist jederzeit (von Schwerkraftswirkung abgesehen) die algebraische Summe der in irgend einer Richtung auf alle Wandungen ausgeübten Drucke gleich Null. Der im vor-

liegenden Falle auf die drei materiellen Flächen des Keilstückes mit den Eckpunkten $a\ b\ c\ d\ e\ f$ übertragene resultierende Druck ist also immer der Grösse nach auch gleich den über den beiden freien Oberflächen lastenden Pressungen, der Richtung nach diesen entgegengesetzt. Wird wie früher der normale Durchflussquerschnitt $a\ b\ c\ d$ mit $d\,f$ und ferner, der Kürze halber, eine freie Oberfläche des Flüssigkeitselementes mit $d\,f_0$ bezeichnet, so drückt sich nach vorstehendem der auf die drei materiellen Flächen des betrachteten Keilstückes übertragene Druck aus:

a) in der in Ebene $E—E$ gelegenen Arbeitsrichtung:

$$-df \cdot p \cos\beta$$

b) in normal dazu gelegener Richtung:

$$(df_0 - df \cdot \sin\beta) \cdot p$$

d. h. wir gelangen auch hier, ganz abgesehen von der Form des Durchflussquerschnittes, zu den gleichen frühern Ausdrücken für die betreffenden Druckäusserungen.

Die Wirkung der hydraulischen Pressung auf die innerhalb des Winkels $d\delta$ gelegenen Wandungselemente ist nach derselben Ueberlegung auch durch die Resultierende derjenigen zwei Drucke bestimmt, welche über den beiden, unter dem Winkel $d\delta$ zu einander gelegenen Querschnittselementen lasten,

also durch: $$2 \cdot df \cdot p \cdot \sin\frac{d\delta}{2} = df \cdot d\delta \cdot p$$

und schliesslich schreibt sich auch der durch Querschnittsänderung erzeugte Druck, wie früher als: $p d(df)$, wenn auch jetzt die Zellenbreite nicht mehr konstant ist.

Damit ist also der Beweis geliefert, dass auch für ein Zellenelement mit ganz beliebig geformten Durchflussquerschnitten die Ausdrücke bezüglich der direkten Wirkung der hydraulischen Flüssigkeitspressung auf sämtliche Leitflächen, gegenüber den früher gewonnenen sich in keiner Weise ändern. Dementsprechend kann sich also auch hier der in der Richtung der Kegelerzeugenden $O_1—K_1$ auf das betrachtete Zellenelement ausgeübte Druck gegenüber demjenigen einer Aktionsturbine nur um die bekannte Grösse $d(df_0 \cdot p)$ unterscheiden.

Erleidet nun das Zellenelement gemäss der vorliegenden allgemeinen Raddisposition eine weitere Krümmung von der Grösse

des in Fig. 14 und 16 dargestellten Winkels dk, so geht daraus einerseits eine Kraft hervor, welche einer bestimmten Normalbeschleunigung des Massenteilchens entspricht und anderseits führt die Uebertragung der hydraulischen Flüssigkeitspressung auf die innerhalb des vorigen Winkels gelegenen Wandungselemente zu einem weitern auf das Rad wirksamen Drucke. Diese beiden Kräfte sind naturgemäss normal zu dem Krümmungsbogen gerichtet, schneiden also die Turbinenaxe und haben daher wiederum keinen Einfluss auf die Arbeitsleistung. Diese ist also auch identisch mit derjenigen des zuvor betrachteten Rades, dessen Zellenaxen in der Kegelfläche $O_1 - K_1$ und dessen Ein- und Austrittsflächen normal zu dieser Kegelerzeugenden gelegen sind. Mit andern Worten darf zur Bestimmung der hydraulischen Leistung ein einzelnes Zellenelement auch als einer reinen Radialturbine angehörig aufgefasst werden, welche einen Radius von der Grösse $\frac{r}{\sin k}$ und eine Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin k$ besitzt, die Umfangsgeschwindigkeit u also, wie auch direkt zu erkennen, gleich $r \cdot \omega$ ist.

Der früher gewonnene Ausdruck betreffs des Drehmomentes lautet pro Masseneinheit der Flüssigkeit:

$$M_T = \frac{d(r \cdot c_u)}{dt} \quad ,$$ also auf obige Bezeichnung bezogen:

$$M_T = \frac{d\left(\frac{r}{\sin k} \cdot c_u\right)}{dt}$$

Da nach vorstehenden Erklärungen in dem Werte der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin k$ bezüglich der Arbeitsleistung der Winkel k für das in Betracht kommende Zellenelement konstant angenommen werden darf, so ergibt sich die pro Masseneinheit des betreffenden Flüssigkeitsteilchens verrichtete Elementararbeit zu:

$$dA = \frac{d(r \cdot \omega \cdot c_u)}{dt} = \frac{d(c_u \cdot u)}{dt}$$

und also durch Integration die an ein vom Eintritt bis an den Austritt des Rades sich erstreckendes Kanalelement abgegebene Arbeit pro Masseneinheit zu:

$$A = c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2$$

d. h. wie bereits behauptet bestimmt sich auch für vorliegendes Rad

die hydraulische Leistung nach der bekannten, eben ganz allgemein giltigen Gleichung.

Der Druck, welcher durch die Uebertragung der hydraulischen Flüssigkeitspressung auf die innerhalb des Winkels dk gelegenen Flächenteilchen zustande kommt, ist seiner Grösse nach gegeben durch: $df_o \cdot dk \cdot p$

Die beiden lediglich aus der potentiellen Energie der Flüssigkeit hervorgehenden Druckgrössen:

$d(df_o \cdot p)$ in Richtung der Kegelerzeugenden $O_1 — K_1$ und

$df_o \cdot dk \cdot p$ senkrecht dazu stehend

führen einerseits zu einer radial gerichteten Komponente von der Grösse:

$$d(df_o \cdot p) \cdot \sin k + df_o \cdot dk \cdot p \cdot \cos k = d(df_o \cdot \sin k \cdot p)$$

und anderseits zu der Axialkomponente:

$$d(df_o \cdot p) \cdot \cos k - df_o \cdot dk \cdot p \cdot \sin k = d(df_o \cdot \cos k \cdot p)$$

Auf einen ganzen Flüssigkeitsfaden bezogen lauten also die beiden Ausdrücke:

$$(dP_r'')_2 = df_{o_1} \cdot \sin k_1 \cdot p_1 - df_{o_2} \cdot \sin k_2 \cdot p_2 \quad \text{und}$$

$$(dP_z'')_2 = df_{o_1} \cdot \cos k_1 \cdot p_1 - df_{o_2} \cdot \cos k_2 \cdot p_2$$

d. h. auch bei einem, einer Ueberdruckturbine angehörigen Zellenelemente ganz allgemeinster Art unterscheidet sich der Ausdruck für die Gesamtheit der auf seine materiellen Wandungen in bestimmten Richtungen ausgeübten passiven Kräfte gegenüber demjenigen einer Aktionsturbine stets um die Differenz derjenigen gesamten Pressungen, welche auf die Projektionen der beiden freien Zellenoberflächen in den betreffenden Richtungen übertragen werden.

Fassen wir nun die sämtlichen gewonnenen Ergebnisse bezüglich der verschiedenen Raddrucke, welche teils aus der kinetischen und teils aus der potentiellen Energie der Flüssigkeit hervorgehen, zusammen, so erhalten wir:

1. Die Umfangskraft pro Massenelement:

$$(dP_u)_3 = dm \cdot \frac{dc_u}{dt} + dm \cdot \frac{c_u \cdot c_r}{r} = dm \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d(c_u \cdot r)}{dt}$$

also das Drehmoment pro Flüssigkeitsfaden:

$$(dM_T)_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{u_1} \cdot r_1 - c_{u_2} \cdot r_2)$$

und die entsprechende hydraulische Leistung:

$$(dL)_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{u_1} \cdot u_1 - c_{u_2} \cdot u_2)$$

2. Der totale Radialdruck pro Flüssigkeitsfaden:

$$(dP_r)_2 = (dP_r')_2 + (dP_r'')_2 \qquad \text{also:}$$

$$(dP_r)_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{r_1} - c_{r_2}) - \Sigma dm \cdot \frac{c_u^2}{r} + df_{o_1} \cdot \sin k_1 p_1 - df_{o_2} \cdot \sin k_2 p_2$$

3. Der totale Axialdruck pro Flüssigkeitsfaden, unter der Annahme, dass die Richtung der Radaxe mit derjenigen der Schwerkraft zusammenfällt:

$$(dP_z)_2 = (dP_z')_2 + (dP_z'')_2 \qquad \text{also:}$$

$$(dP_z)_2 = \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot (c_{z_1} - c_{z_2}) + \Sigma dm \cdot g + df_{o_1} \cdot \cos k_1 p_1 - df_{o_2} \cdot \cos k_2 p_2$$

Den bisherigen Betrachtungen lag nun stets die Voraussetzung einer durch unendlich dünne Scheidewände hergestellt gedachten Führung der einzelnen Flüssigkeitselemente zu Grunde. Erlauben nun auch die Eintrittsverhältnisse und ferner die Gestaltung der Leitflächen eines bestimmten ausgeführten Laufrades mit endlichen Zellenweiten überhaupt eine zwangslose, kontinuierlich veränderliche Strömung der Flüssigkeit durch dasselbe, so wird dabei doch keineswegs mehr, wie bei unendlich vielen Schaufeln, gleicher Bewegungszustand auf den einzelnen Parallelkreisen herrschen können, worauf wir übrigens am Schlusse der Abhandlung noch besonders zu sprechen kommen werden. Aber wenn auch unter diesen Umständen die einzelnen Massenelemente unter der allseitigen Einwirkung der sie rings umgebenden Flüssigkeit örtlich ganz verschiedenen Zustandsänderungen unterliegen, so gehen diese schliesslich doch immer wieder aus ein und denselben bekannten Ursachen hervor; nur findet jetzt die Uebertragung des dabei im Innern der Flüssigkeit erzeugten Druckes nicht mehr in direkter Weise auf die Zellenwandungen statt, sondern vielmehr vermittelst der in stetem Zusammenhange bleibenden Flüssigkeitsmasse selbst. Nach diesen Ver-

hältnissen ist also wohl zu erwarten, dass auch für Räder mit endlichen Zellenweiten sowohl ihre Umfangskraft als die beiden passiven Raddrucke sich ihren gesamten Grössen nach auf Grund unserer synthetisch hergeleiteten Ausdrücke bestimmen lassen werden.

Betrachten wir in dieser Hinsicht nochmals die einem einzelnen Massenelemente zukommenden Komponenten der absoluten Tangential- und Normalbeschleunigung:

1. In Richtung der Radbewegung: $\frac{dc_u}{dt} + \frac{c_u \cdot c_r}{r}$

2. In radialer Richtung: $\frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r}$

3. In axialer Richtung: $\frac{dc_z}{dt} + g$ mit bisheriger Vorzeichenbeob. von g,

so erkennen wir, dass diese Ausdrücke identisch sind mit denjenigen der auf ein zylindrisches Koordinatensystem bezogenen Fundamentalgleichungen, welche nämlich, unter Vernachlässigung der passiven Widerstände, lauten:

1. $$-\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\delta p}{\delta \vartheta} = \frac{dc_u}{dt} + \frac{c_u \cdot c_r}{r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d(c_u \cdot r)}{dt}$$

2. $$-\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\delta p}{\delta r} = \frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r}$$

3. $$-\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\delta p}{\delta z} = \frac{dc_z}{dt} + g$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit dem Massenelement

$$dm = \frac{\gamma}{g}\cdot r\cdot d\vartheta\cdot dr\cdot dz\ ,$$ so folgt:

1. $$-\left(\frac{\delta p}{r\cdot\delta\vartheta}\cdot r\cdot d\vartheta\right)\cdot dr\cdot dz = dm\cdot\left(\frac{dc_u}{dt} + \frac{c_u\cdot c_r}{r}\right) = dm\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d(c_u\cdot r)}{dt}$$

2. $$-\left(\frac{\delta p}{\delta r}\cdot dr\right)\cdot r\cdot d\vartheta\cdot dz = dm\cdot\left(\frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r}\right)$$

3. $$-\left(\frac{\delta p}{\delta z}\cdot dz\right)\cdot r\cdot d\vartheta\cdot dr = dm\cdot\left(\frac{dc_z}{dt} + g\right)$$

Die links stehenden Ausdrücke bedeuten nun nichts anderes, als die Differenziale derjenigen Drucke, welchen momentan das

Massenelement *dm* (bezw. beständig die in dem bestimmten Raumelement enthaltene Massengrösse *dm*) nach den drei Raumrichtungen an seinen dafür in Betracht kommenden Oberflächen unterliegt. Die Integration ausgeführt über die einzelnen Zellenvolumina, oder besser gesagt über das Gebiet, innerhalb welchem eine kontinuierlich veränderliche Bewegung herrscht, ergibt somit die endlichen Differenzen derjenigen Drucke (Reaktionen), welche in tangentialer, radialer und axialer Richtung auf die Begrenzungsflächen der Zellen bezw. der betreffenden Raumgebiete ausgeübt werden.

Zieht man nun in Betracht, dass in Richtung der Radbewegung die Gesamtreaktion der Flüssigkeitsmasse stets einzig und allein nur durch die Schaufelflächen aufgenommen werden kann, so erkennt man auch ohne weiteres in der rechts stehenden Grösse der ersten Gleichung die pro Massenelement geäusserte Umfangskraft oder, mit $r \cdot \omega$ multipliziert und integriert, den bekannten allgemeinen Ausdruck für die hydraulische Leistung. Im Gegensatz zu diesen Verhältnissen findet die im Rade enthaltene Flüssigkeit in radialer und axialer Richtung ihre Begrenzung nicht nur an den materiellen Schaufel- und Kranzflächen, sondern vielmehr auch noch an den unter bestimmten Pressungen am Rad-Ein- und Austritt stehenden Flüssigkeitsschichten. Die in diesen beiden Richtungen an die Zellenwandungen übertragenen passiven Drucke sind daher nicht allein durch die Integralwerte der in den Gleichungen 2. und 3. rechts stehenden Ausdrücke dynamischen Charakters bestimmt, sondern zu diesen Werten kommen auch noch diejenigen hinzu, welche die Wirkung des Umstandes ausdrücken, dass die Flüssigkeit an ihren oben erwähnten Begrenzungsflächen eben zum Teil auch ihre Reaktion in sich selbst findet; ihrem Aussehen nach stimmen diese Ausdrücke mit solchen statischer Flüssigkeitspressungen überein, woher denn auch offenbar die Bezeichnung „hydrostatischer Druck“ herrührt. Der Grösse nach sind diese Drucke gegeben durch das Produkt der Zylinder- bezw. Horizontalprojektionen der am Rad-Ein- und Austritt gelegenen bestimmten Flüssigkeitsoberflächen und den daselbst herrschenden spez. absoluten Pressungen; ihrer Richtung nach gehen diese Kräfte stets nach dem Radinnern.

Handelt es sich schliesslich um die auf die Schaufelflächen allein geäusserten sogenannten „statischen Wirkungen“, so kommen zu

den vorherigen auch noch die auf die betreffenden Projektionen der Radkranzflächen ausgeübten Drucke hinzu, welche ebenfalls immer nach dem Innern des Rades gerichtet sind.

Diese Anwendung der Fundamentalgleichungen auf eine, ein Turbinenrad durchströmende Flüssigkeit führt uns also auf direktem Wege wohl zu dem gleichen Schlussergebnisse, wie unsere synthetischen Untersuchungen, gibt uns dagegen allerdings keinen nähern Aufschluss über den eigentlichen Vorgang der verschiedenen möglichen elementaren Druckäusserungen. Trotzdem findet merkwürdigerweise diese einfache Beziehung zwischen den Strömungs- und Druckverhältnissen einer Flüssigkeit und den erzeugten Raddrucken, d. h. im Grunde genommen nichts anderes als der sogenannte Satz über den Antrieb, angewandt auf die absolute, auf ein zylindrisches Koordinatensystem bezogene Bewegung, in der Turbinentheorie nur sehr wenig Verwertung.

Gerade darin ist auch der Grund zu suchen, warum vielerorts in der Fachlitteratur, wie z. B. auch in dem bekannten Werke von Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. G. Zeuner: „Vorlesungen über Theorie der Turbinen", 1899, bei der Grössenbestimmung der passiven Raddrucke, Seite 77—78, die einseitig auf die Leitflächen wirkenden Reaktionskräfte wohl ihre Berücksichtigung finden, dagegen von der direkten Wirkung der hydraulischen Flüssigkeitspressung auf die Zellenwandungen gar keine Rede ist und dieselbe daher ganz stillschweigend zu den vorigen Kräften addiert werden muss.

In dem englischen Werke über „Hydraulic motors"*) von Herrn Prof. de Volson Wood, Ausgabe 1901, Seite 62, wird die Gesamtheit der aus der potentiellen Energie der Flüssigkeit hervorgehenden allseitig gerichteten Flächendrucke in dem einzigen Ausdrucke 9. summarisch zusammengefasst. Es zeigt sich aber bei der Aufstellung des Radialdruckes, dass diese Grösse 9. nur eine beschränkte Giltigkeit besitzt. In unsere Bezeichnungen übertragen und mit $\cos \beta$ multipliziert, lautet dieselbe nämlich, da $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \beta$ und:

$$-x \cdot \varrho \cdot d\Theta = \frac{df}{\sin \beta}$$

*) Turbines, theoretical and practical. De Volson Wood, late professor.

9. $$\frac{df}{\sin\beta}\cdot\cos^2\beta\cdot dp = \frac{df}{\sin\beta}\cdot dp - df\cdot\sin\beta\cdot dp$$

gegenüber der Summe unserer vier elementaren Druckgrössen:

$$d\left(\frac{df\cdot p}{\sin\beta}\right) - df\cdot\sin\beta\cdot dp$$

d. h. die Ableitung nach Herrn Prof. de Volson Wood gilt nur für den ganz speziellen Fall, dass $\frac{df}{\sin\beta}$ konstant bleibt.

Zum Abschlusse der vorliegenden Arbeit sollen jetzt nur noch in Kürze die Druckverhältnisse in einer Zelle einer Axialturbine betrachtet werden, deren besondere Gestaltung nach Fig. 17 eine wirkliche stufenweise Zustandsänderung der Flüssigkeit zur Folge hat. Der störende Einfluss der Zentrifugalkraft auf die strömende Bewegung, besonders von Gasen und Dämpfen falle dadurch ausser Betracht, dass man sich die einzelnen konzentrischen Flüssigkeitsschichten wiederum durch materielle Wandungen von einander getrennt denkt, so dass sich die folgenden Untersuchungen auch auf die Abwicklung irgend eines zylindrischen Radschnittes beziehen können. Von der Schwerkraftswirkung innerhalb des Laufrades werde abgesehen und ebenso, wie bisher, son sämtlichen passiven Widerständen und schliesslich eine adiabatische Strömung der Flüssigkeit vorausgesetzt.

Fig. 17 lässt nun ohne weiteres die verschiedenen Wirkungsarten der Flüssigkeit in den einzelnen Zellenabschnitten leicht erkennen: In erster Linie wird es sich um eine Kraft handeln, welche auf das am Radeintritte gelegene ebene Schaufelstück ausgeübt wird, dessen Umfangsgeschwindigkeit u, zwecks klarer Vorstellung der eigentlichen Druckübertragung sich in die beiden Komponenten c_1 und $-w_1$ zerlegen lässt. Von diesen hat die letztere nur eine Verschiebung der ebenen Fläche in sich selbst zur Folge und ist daher bezüglich der Grösse des auf sie geäusserten Druckes vollständig belanglos, so dass für unsere Untersuchung nur die mit der absoluten Bewegung der Flüssigkeit zusammenfallende Geschwindigkeitskomponente c_1 des ebenen Zellenstückes in Betracht kommt. Dieses unterliegt also auf seinem in der betreffenden Richtung von c_1

zurückgelegten Wege der hydraulischen Flüssigkeitspressung p_1, ganz analog wie z. B. der Kolben einer Wassersäulenmaschine oder einer Dampfmaschine während ihrer Admissionsperiode. Die dabei verrichtete Arbeit entspricht also mit andern Worten nichts anderem, als der gesamten Volldruckenergie der betreffenden Flüssigkeit.

Die Ursache der Entstehung von zwei weitern Kräften P_2 und P_3 liegt sodann in einer bestimmten Krümmung der Schaufelflächen. Dadurch wird nämlich einerseits, der relativen Ablenkung der Flüssigkeit entsprechend, eine bestimmte einseitig gerichtete Kraft erzeugt, und anderseits geht aus dem Umstande, dass die beiden unter der hydraulischen Pressung stehenden Flächen ungleich lang sind, ein weiterer Raddruck hervor. Dabei werden auch für kompressible Flüssigkeiten konstante Relativgeschwindigkeit und konstanter hydraulischer Druck vorausgesetzt, und zwar auf konzentrisch zum Krümmungsmittelpunkt liegenden Bahnen, was wiederum die Anbringung von gleichverlaufenden, unendlich dünnen, sehr benachbarten Schaufelflächen erfordert, wodurch aber an der Art der beiden zur Geltung kommenden Wirkungen der Flüssigkeit selbst nichts geändert wird.

Die hierauf eintretende Querschnittsänderung der Turbinenzelle hat eine Relativbeschleunigung der Flüssigkeit zur Folge und führt zu einer in der Richtung der nunmehrigen Zellenaxe auf das Rad wirksamen Kraft P_4, und endlich unterliegt noch das am Austritte gelegene Schaufelstück der hydraulischen Pressung p_2, wodurch der Druck P_5 entsteht.

Die stufenweise Zustandsänderung der Flüssigkeit könnte schliesslich auch dadurch erreicht werden, dass man zuerst die Querschnittsänderung und hierauf die einseitige Schaufelkrümmung eintreten liesse, ohne damit eine prinzipielle Aenderung der nachfolgenden Ableitungen zu veranlassen.

Wenn nun auch nach Fig. 17 speziell an eine Zelle einer Wasserüberdruckturbine gedacht ist, so kommt doch für die rechnerische Bestimmung der besprochenen Raddrucke, immer wieder unter den allgemeinen Voraussetzungen über die strömende Bewegung, der Aggregatzustand der betreffenden Flüssigkeit gar nicht in Betracht. Unter der weitern Annahme, dass diese von einem bestimmten Anfangszustande aus jeweils in ihrer Gesamtheit ein

und dieselbe dem gewählten Schaufelschnitte entsprechende Zustandsänderung erleidet, lässt sich die totale Umfangskraft aus folgenden Komponenten zusammensetzen (unter f nunmehr die Summe sämtlicher Durchflussquerschnitte verstanden):

$$P_{u_1} = -f_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot p_1 \cdot \sin \beta_1 = -f_1 \cdot p_1 \cdot \cos \beta_1$$

Ferner folgt der dynamische Krümmungsdruck:

$$P_{u_2} = M \cdot w_1 \cdot \cos \beta_1 - M \cdot w_1 \cdot \cos \beta_2$$

und der statische Krümmungsdruck:

$$P_{u_3} = \int f_1 \cdot d\beta \cdot p_1 \cdot \sin \beta = f_1 \cdot p_1 \cdot \cos \beta_1 - f_1 \cdot p_1 \cdot \cos \beta_2$$

Die Kraft P_{u_4} bestimmt sich als: $\int p \cdot df \cdot \cos \beta_2$

Zum Zwecke der Integration lassen sich p und f nach der Gleichung des Arbeitsvermögens bezw. der Kontinuitätsgleichung als Funktionen von w ausdrücken. Für Wasser ist z. B. die konstant bleibende Energie relativ zum Rade pro 1 Kg. ausgedrückt durch: $\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g}$ (von Schwerkraftswirkung im Rade abgesehen) und sei mit $\mathcal{H}$ beseichnet, so dass: $p = \gamma\left(\mathcal{H} - \frac{w^2}{2g}\right)$

Ferner ist: $\frac{f \cdot w \cdot \gamma}{g} = M$, also $f = \frac{M \cdot g}{\gamma} \cdot \frac{1}{w}$ und

$df = -\frac{M \cdot g}{\gamma} \cdot \frac{1}{w^2} \cdot dw$; demnach schreibt sich:

$$P_{u_4} = -\cos \beta_2 \cdot M \cdot g \cdot \int \left(\mathcal{H} - \frac{w^2}{2g}\right) \cdot \frac{1}{w^2} \cdot dw$$

$$= -\cos \beta_2 \cdot M \cdot g \left\{ -\mathcal{H}\left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}\right) - \frac{1}{2g}(w_1 - w_2) \right\}$$

Setzt man nun für: $\mathcal{H} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{{w_1}^2}{2g}$, oder auch $= \frac{p_2}{\gamma} + \frac{{w_2}^2}{2g}$, so folgt:

$$P_{u_4} = \cos \beta_2 \cdot M \cdot g \left\{ \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{{w_1}^2}{2g}\right) \cdot \frac{1}{w_1} - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{{w_2}^2}{2g}\right) \frac{1}{w_2} + \frac{1}{2g}(w_1 - w_2) \right\}$$

Da ferner für: $Mg = f_1 \cdot w_1 \cdot \gamma = f_2 \cdot w_2 \cdot \gamma$ gesetzt werden kann, so ist auch: $P_{u_4} = \cos \beta_2 \left\{ f_1 \cdot p_1 + \frac{M}{2} \cdot w_1 - f_2 \cdot p_2 - \frac{M}{2} \cdot w_2 + \frac{M}{2}(w_1 - w_2) \right\}$

$$= f_1 \cdot p_1 \cdot \cos \beta_2 - f_2 \cdot p_2 \cdot \cos \beta_2 + M \cdot w_1 \cdot \cos \beta_2 - M \cdot w_2 \cdot \cos \beta_2$$

Haben wir es mit einer expansiblen Flüssigkeit zu tun, so gelangen wir z. B. auf Grund der allgemeinen Zustandsgleichung $p \cdot v^n = \text{konst.}$, der entsprechenden Gleichung des Arbeitsvermögens und der Kontinuitätsgleichung auf etwas langwierigerem Wege genau zu demselben Resultate. Dies ist übrigens auch ohne weiteres zu erwarten, da ja die obige Gleichung auch direkt aus dem, auf das betreffende Zellenstück angewandten Satze über den Antrieb hervorgeht und demnach ganz allgemeine Giltigkeit besitzt.

Die letzte Kraft ist bestimmt durch:

$$P_{u_5} = f_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 \cdot p_2 \cdot \sin \beta_2 = f_2 \cdot p_2 \cdot \cos \beta_2$$

und die Summation sämtlicher Werte führt schliesslich wiederum zu dem bekannten Ausdrucke für die totale Umfangskraft einer Axialturbine:

$$P_{u_\varepsilon} = M \cdot (w_1 \cdot \cos \beta_1 - w_2 \cdot \cos \beta_2) \ ,$$

bezw. zu der hydraulischen Leistung:

$$L_\varepsilon = M \cdot (w_1 \cdot \cos \beta_1 - w_2 \cdot \cos \beta_2)\, u$$

Der Axialdruck ergibt sich aus folgenden Grössen:

$$P_{z_1} = f_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot p_1 \cdot \cos \beta_1 = \frac{f_1 \cdot p_1}{\sin \beta_1} - f_1 \cdot p_1 \cdot \sin \beta_1$$

$$P_{z_2} = M \cdot w_1 \cdot \sin \beta_1 - M \cdot w_1 \cdot \sin \beta_2$$

$$P_{z_3} = -\int f_1 \cdot d\beta \cdot p_1 \cdot \cos \beta = f_1 \cdot p_1 \cdot \sin \beta_1 - f_1 \cdot p_1 \cdot \sin \beta_2$$

$$P_{z_4} = f_1 \cdot p_1 \cdot \sin \beta_2 - f_2 \cdot p_2 \cdot \sin \beta_2 + M \cdot w_1 \cdot \sin \beta_2 - M \cdot w_2 \cdot \sin \beta_2$$

$$P_{z_5} = -f_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 \cdot p_2 \cdot \cos \beta_2 = -\frac{f_2 \cdot p_2}{\sin \beta_2} + f_2 \cdot p_2 \cdot \sin \beta_2$$

Also folgt durch Summation der axial gerichtete, totale passive Raddruck:

$$P_{z_\varepsilon} = \frac{f_1 \cdot p_1}{\sin \beta_1} - \frac{f_2 \cdot p_2}{\sin \beta_2} + M \cdot w_1 \cdot \sin \beta_1 - M \cdot w_2 \cdot \sin \beta_2$$

Die besondere Gestalt der Wandungen der in Fig. 17 gezeichneten Zelle führt naturgemäss zu ganz ungleichen Bewegungsverhältnissen auf einzelnen Parallelkreisen. Aber auch bei gleich verlaufenden Schaufelseiten ist immer der Umstand wohl zu berücksichtigen, dass der aus dem Leitrad tretende Flüssigkeitsstrom mehr oder weniger tief in die einzelnen Laufradzellen eintritt, ohne an

seiner absoluten Bewegung irgendwie gehindert zu werden, es sei denn, dass eine allzu vorzeitige Krümmung der Schaufelflächen zu beträchtlichern Stosswirkungen Veranlassung gäbe. Gerade dieser ganze Vorgang macht aber auch bei beidseitig gleichen Schaufelprofilen eine Erreichung gleichen Bewegungszustandes auf Parallelkreisen offenbar unmöglich, und zwar je nach Schaufellage am Spalt der beiden Räder und Grösse der Zellenweiten in mehr oder weniger hohem Grade. Ferner geht aus diesen allgemeinen Verhältnissen auch die Tatsache hervor, dass bei jeder Ueberdruckturbine die unter bestimmter hydraulischer Pressung in das Laufrad eintretende Flüssigkeit auf die ihr zugekehrte Schaufelfläche in ganz analoger Weise zur Wirkung gelangt, wie z. B. auf die Kolbenfläche irgend einer Zylindermaschine. Die weitere Beurteilung der Art der Druckäusserung der Flüssigkeit in ihrem Laufe durch das Rad wird sodann ganz auf Grund der speziellen Gestalt der betreffenden Turbinenzelle zu geschehen haben, welche bald ein mehr gleichzeitiges und bald mehr von einander getrenntes Eintreten der verschiedenen, elementaren Zustandsänderungen der Flüssigkeit bewirken kann.

Ganz allgemein ist aber auch jederzeit die aus den verschiedenen Ursachen zugleich resultierende Wirkung sämtlicher Flüssigkeitsteilchen auf ihre unmittelbare Umgebung durch die Fundamentalgleichungen ausgedrückt, so dass die in erklärter Weise und bestimmter Richtung zu verstehende Integration derselben auch stets zu denjenigen Drucken führt, welche auf die Begrenzungsflächen der unter kontinuierlicher Bewegungsänderung stehenden Flüssigkeitsmasse ausgeübt werden. Berücksichtigt man dazu ferner die unter konstanter hydraulischer Flüssigkeitspressung direkt an die Schaufelflächen übertragenen Drucke, so gelangen wir ohne weiteres immer wieder zu unsern allgemeinen Sätzen bezüglich der aus der kinetischen und potentiellen Energie der Flüssigkeit hervorgehenden Druckäusserungen auf das Rad.

Zur besondern Ehre gereicht es mir noch, an dieser Stelle meinen hochgeehrten Herren Professoren der Prüfungs-Kommission, **Dr. M. Schröter, Dr. phil. Dr. ing. R. Camerer** und **Dr. A. Föppl,** für alle Ihre Bemühungen und die von Ihrer Seite mir gütigst zugekommenen Ratschläge hinsichtlich der vorliegenden Dissertation, meinen besten Dank aussprechen zu können.

Veltheim bei Winterthur, den 29. April 1907.